Álgebra Lineal Básica para Ingenieros

Versión 1.3 (6 de septiembre de 2020)

David J. Santos
Universidad San Pablo-CEU

Prólogo

Esta breve obra (*Álgebra Lineal Básica para Ingenieros*) nace con un objetivo claramente utilitario: ofrecer una síntesis del Álgebra Lineal que permita al estudiante de Ingeniería aprender a pensar con claridad en contextos abstractos y de una complejidad creciente[1].

Es perfectamente constatable, por cualquiera que lleve algún tiempo impartiendo clase en primer curso en las escuelas de Ingeniería españolas, que los estudiantes que ingresan en ellas no saben pensar con claridad, pues en el Bachillerato español no se realiza el más mínimo énfasis en este importante aspecto de la educación de los estudiantes. A ello hay que añadir que la formación matemática recibida suele ser deficiente, fragmentada, sin unidad de ninguna clase, y muy reduccionista en su planteamiento, que no es otro que la adquisición de destreza en la resolución de los *ejercicios tipo* que constituyen la Prueba de Matemáticas para el acceso a la Universidad española.

El diagnóstico anterior obliga a plantear un curso necesariamente autocontenido, sin presuponer en el estudiante conocimientos previos mínimamente estructurados. Además, será necesario introducir los conceptos fundamentales de la disciplina de manera progresiva y unitaria, estableciendo claramente las relaciones entre ellos, como si de una *historia* se tratara. Este planteamiento obligará a sacrificar el rigor matemático, fundamentalmente en las demostraciones, que en algunos casos no pasarán de simples justificaciones. Académicamente, este curso se encuadra en una asignatura de 6 ECTS del primer semestre del primer curso de un Grado en Ingeniería de Sistemas de Telecomunicación.

El objeto matemático central del Álgebra Lineal es la aplicación lineal. Desde un punto de vista ingenieril, una aplicación lineal es un buen modelo de un sistema, entendido éste como la entidad abstracta básica en el modelado de procesos en Ingeniería. Para entender las aplicaciones lineales, es preciso antes conocer muy bien la naturaleza de los espacios vectoriales, las estructuras matemáticas abstractas sobre las que actúan las aplicaciones lineales; éstos, a su vez, remiten a la consideración más general de las llamadas estructuras algebraicas. Así pues, los prolegómenos de nuestro tratamiento de la disciplina vienen determinados por la secuencia: (1) estructuras algebraicas; (2) espacios vectoriales; (3) aplicaciones lineales.

Sentadas estas bases, podremos centrarnos en la caracterización y uso creativo de las aplicaciones lineales. De especial interés serán las aplicaciones lineales que actúan transformando vectores dentro de un mismo espacio (endomorfismos u operadores), particularmente cuando sobre el espacio se ha definido un producto interior, que habilita para la consideración de medidas de tamaño (energía) y ángulo entre vectores (correlación, en sentido amplio).

El Álgebra Lineal no es difícil, pero exige un contacto constante del estudiante con ella. Las ideas fundamentales están tan relacionadas entre sí, y su correcta asimilación exige, para no caer en una sobrecarga cognitiva, de una maduración tan progresiva, que desconectarse tempranamente de la disciplina, con la ilusa esperanza de reconectarse a ella más adelante, puede tener consecuencias letales. Además, es absolutamente necesario enfrentarse a ejercicios de complejidad creciente, que (1) vayan poniendo a prueba la correcta

[1] Servir a este objetivo supone fijar previamente un plantamiento pedagógico, que se describe brevemente en el Apéndice A.

comprensión de las ideas clave de la disciplina, (2) reduzcan la inicialmente inevitable confusión, y (3) proporcionen seguridad al estudiante. Para ello, al final de cada capítulo se proponen una selección de *Ejercicios* y otra de *Problemas* Los Ejercicios constituyen un material de autoevaluación de primer nivel: permiten verificar la comprensión y uso de las principales ideas. Están organizados secuencialmente de manera paralela a como las ideas son introducidas en el capítulo. Los Problemas suelen tener un nivel de complejidad mayor: permiten verificar si se ha alcanzado un nivel de comprensión profundo, necesario para abordar con éxito los exámenes de la asignatura. Están deliberadamente desordenados, tanto en su temática como en su complejidad.

Índice general

Capítulo 1

Estructuras algebraicas

A grandes rasgos podríamos decir que una estructura algebraica es el objeto matemático compuesto por uno o más conjuntos, en los que es posible definir operaciones de ámbito interno a un conjunto, o externo a éste, y que verifican una serie de propiedades. Este marco es muy general, por lo que trataremos en lo posible de no complicar en exceso el formalismo, limitándolo al mínimo necesario para introducir las estructuras algebraicas más frecuentes en el Álgebra Lineal. Por tanto, la secuencia expositiva arrancará de un tratamiento muy sumario de los conjuntos y las operaciones algebraicas, para desembocar finalmente en tres estructuras concretas: el grupo, el cuerpo y el anillo.

1.1. Conjuntos y subconjuntos

Un conjunto, normalmente designado mediante una letra mayúscula o caligráfica, es una colección de objetos matemáticos bien definida. Estos objetos, denominados elementos del conjunto, y que se designan mediante letras minúsculas, suelen verificar una condición de pertenencia que los habilita para formar parte del conjunto. Así, si el elemento x, del conjunto X, verifica la condición de pertenencia asociada a X, diremos que $x \in X$.

Es posible referirse a una parte de un conjunto sin necesidad de considerar uno a uno sus elementos. Esto se consigue mediante los subconjuntos, o conjuntos contenidos dentro de un conjunto. Esta relación jerárquica se suele expresar de la forma $Y \subseteq X$, en donde Y sería un subconjunto de X.

Como ejemplo, considere el conjunto $X = \mathbb{R}^3 = \{(x, y, z) : \forall x, y, z \in \mathbb{R}\}$. Un posible subconjunto de X sería $Y = \mathbb{R}^2 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : z = 0\}$. Otro sería $Z = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : 2x - y + z = 0\}$. Desde un punto de vista geométrico, ambos subconjuntos determinarían planos en $\mathbb{R}^3$.

Afortunadamente, el formalismo es lo suficientemente general para poder considerar objetos matemáticos más complejos. Considere por ejemplo el conjunto de todos los polinomios reales de coeficientes reales y de grado máximo 2: $P_2(\mathbb{R}) = \{ax^2 + bx + c, \forall a, b, c \in \mathbb{R}\}$. En este conjunto podríamos definir el subconjunto $P_1(\mathbb{R}) = \{p(x) \in P_2(\mathbb{R}) : a = 0\}$. Estaría formado por todos los polinomios de grado inferior o igual a 1.

1.2. Operaciones con conjuntos

Dados dos conjuntos A y B, es posible definir operaciones entre ellos. Por ejemplo, definimos la unión de los dos conjuntos como $A \cup B = \{x : x \in A \,\mathrm{OR}\, x \in B\}$; o la intersección de A y B como $A \cap B = \{x : x \in A \,\mathrm{AND}\, x \in B\}$, en donde mediante "OR" y "AND" designamos las operaciones lógicas convencionales.

También es posible combinar dos conjuntos mediante un artificio denominado producto cartesiano. Así, dados los conjuntos A y B, podemos definir $A \times B$ de la forma: $A \times B = \{(x, y) : \forall x \in A, \forall y \in B\}$. Se crea así una estructura más compleja, resultado de la yuxtaposición de elementos de ambos conjuntos. Como ejemplo sencillo, considere los conjuntos $A = \{1, 2\}$ y $B = \{3, 4, 5\}$. Según acabamos de ver, en este caso: $A \times B = \{(1, 3), (1, 4, (1, 5), (2, 3), (2, 4), (2, 5)\}$. Observe que $\mathbb{R}^2 = \mathbb{R} \times \mathbb{R}$.

Tenga presente que el producto cartesiano de conjuntos es en general no conmutativo; es decir: $A \times B \neq B \times A$. Compruébelo con el ejemplo anterior.

El producto cartesiano, tal y como lo hemos definido, puede extenderse de manera natural a más de dos conjuntos.

1.3. Operaciones algebraicas binarias

Sea el conjunto A, y considere el conjunto $A \times A$. Vamos a definir una operación \$ entre los elementos de $A \times A$ y los de A: $\$(a_1, a_2) = a_1 \$ a_2$, $\forall a_1, a_2 \in A$. Observe que $a_1 \$ a_2 \in A$. Esta operación, que sería binaria, por actuar sólo sobre dos elementos, sería además *interna*, pues el resultado de su actuación sobre dos elementos de A sigue siendo un elemento de A. Podemos abstraer lo dicho hasta ahora de la siguiente manera: $\$: A \times A \longrightarrow A$.

Consideremos ahora dos conjuntos distintos A y B, y sea el producto cartesiano entre ellos $B \times A$ (recuerde: el orden importa). Sea ahora la operación algebraica # que, de acuerdo con la abstracción del párrafo anterior, escribimos como $\# : B \times A \longrightarrow A$. En este caso, también se trata de una operación binaria, pues actúa sobre dos elementos, uno de cada conjunto, pero el resultado de la operación es un elemento de A, por lo que podemos decir que es *externa*, en el sentido de que el elemento de A es combinado externamente, con uno de otro conjunto B, para generar un elemento de A: $b \# a \in A, \forall a \in A, \forall b \in B$.

Antes de continuar, tratemos de fijar estos dos conceptos, de operación interna y operación externa, mediante algunos ejemplos.

- Ejemplo de operación interna: Sea $A = P_2(\mathbb{R})$ (véase la Sección 1.1), y sea la operación interna que, para dos elementos de A, denotados mediante p y q, genera $p\$q$. Si $p = a_2x^2 + a_1x + a_0$ y $q = b_2x^2 + b_1x + b_0$, se define la acción de \$ sobre p y q de la forma: $p\$q = (a_2 + b_2)x^2 + (a_1 + b_1)x + (a_0 + b_0)$. Observe que esta operación interna está bien definida, pues $p\$q \in P_2(\mathbb{R})$. De hecho, la operación así definida no es más que la suma convencional de polinomios.

- Ejemplo de operación externa: Supongamos ahora adicionalmente que el conjunto *externo* es $B = \mathbb{R}$. Y sea la operación externa definida como $\lambda \# p = \lambda a_2 x^2 + \lambda a_1 x + \lambda a_0$. Esta operación está bien definida, pues claramente $\lambda \# q \in P_2(\mathbb{R})$. Observe que, como en el caso de la operación interna en el ejemplo anterior, esta operación es como convencionalmente multiplicamos un polinomio por un número real.

La conexión que se ha hecho, en los dos ejemplos anteriores, con la forma tradicional de operar con polinomios no debe inducir a pensar que estaremos siempre ante situaciones *familiares*. Considere, como último ejemplo, la siguiente operación interna, definida sobre $\mathbb{R}$: $a\$b = (a^3 + b^3)^{\frac{1}{3}}, \forall a, b \in \mathbb{R}$.

1.4. Tres estructuras algebraicas sencillas

En la sección anterior hemos definido las operaciones interna y externa sobre conjuntos. Como decíamos al principio del capítulo, a estas operaciones hay que añadir ciertas propiedades, de forma que la combinación de operaciones y propiedades da lugar a distintas estructuras algebraicas. En esta sección, por su interés y sencillez, vamos a analizar tres estructuras algebraicas: el grupo, el anillo y el cuerpo.

1.4.1. El grupo

Un grupo es una estructura alegbraica compuesta por un conjunto A y una operación interna $\$$: $(A, \$)$. A la operación interna se le exigen las siguientes tres propiedades:

1. **Asociatividad**: $\forall a_1, a_2, a_3 \in A, (a_1 \$ a_2) \$ a_3 = a_1 \$ (a_2 \$ a_3)$.
2. **Elemento neutro**: $\forall a \in A, \exists 0_A \in A : a \$ 0_A = a$.
3. **Elemento simétrico**: $\forall a \in A, \exists a' \in A : a \$ a' = a' \$ a = 0_A$.

Si la operación interna es conmutativa, $a\$b = b\$a, \forall a, b \in A$, entonces el grupo se llama conmutativo o abeliano[1].

1.4.2. El anillo

Un anillo es una estructura algebraica compuesta por un conjunto A y dos operaciones internas, $\$_1$ y $\$_2$, de forma que la terna $(A, \$_1, \$_2)$ verifica lo siguiente:

1. La estructura $(A, \$_1)$ es un **grupo conmutativo**.
2. $\$_2$ es **asociativa**: $\forall a_1, a_2, a_3 \in A, (a_1 \$_2 a_2) \$_2 a_3 = a_1 \$_2 (a_2 \$_2 a_3)$.
3. $\$_2$ es **distributiva** con respecto a $\$_1$ por la **izquierda**: $\forall a_1, a_2, a_3 \in A, a_1 \$_2 (a_2 \$_1 a_3) = (a_1 \$_2 a_2) \$_1 (a_1 \$_2 a_3)$.
4. $\$_2$ es **distributiva** con respecto a $\$_1$ por la **derecha**: $\forall a_1, a_2, a_3 \in A, (a_1 \$_1 a_2) \$_2 a_3 = (a_1 \$_2 a_3) \$_1 (a_2 \$_2 a_3)$.

Si $\$_2$ es, además, conmutativa, el anillo se dice conmutativo.

[1] En referencia al matemático Noruego Niels Abel (1802–1829).

1.4.3. El cuerpo

Un cuerpo es también una estructura algebraica compuesta por un conjunto A y dos operaciones internas, $\$_1$ y $\$_2$, de forma que:

1. $(A, \$_1, \$_2)$ es un **anillo**.
2. $(A, \$_2)$ es un **grupo**.

En esta obra trabajaremos exclusivamente con dos cuerpos: $(\mathbb{R}, +, \cdot)$, el cuerpo de los números reales, donde las operaciones internas son las convencionales suma y producto de números reales; y $(\mathbb{C}, +, \cdot)$, el cuerpo de los números complejos, donde las operaciones internas son, en este caso, la suma y producto de números complejos[2]. De manera genérica nos referiremos a ambos cuerpos mediante la letra $\mathbb{F}$ (del inglés *Field*).

1.5. Ejercicios propuestos

[E-1.1] Sea A el conjunto de matrices reales, cuadradas, de dimensión 2 y determinante no nulo. Demuestre que A, junto con el producto estándar de matrices, es un grupo. ¿Es un grupo conmutativo?

[E-1.2] Sea la operación interna $a\$b = (a^3 + b^3)^{\frac{1}{3}}, \quad \forall a, b \in \mathbb{R}$. ¿Constituye este conjunto ($\mathbb{R}$), junto con la operación interna especificada, un grupo?

[E-1.3] Sea A el conjunto de matrices reales, cuadradas, de dimensión 2. ¿Forma este conjunto, junto con la suma y producto de matrices convencionales, un anillo no conmutativo?

[E-1.4] Sea $B = \{a + ib;\ a, b \in \mathbb{Z}\}$ (conjunto de los enteros de Gauss). Pruebe que este conjunto, con la suma y producto convencionales, es un anillo conmutativo. ¿Es B un cuerpo?

[E-1.5] Demuestre que $\mathbb{R}$ y $\mathbb{C}$ son ambos cuerpos con respecto a la suma y producto convencionales.

[2]Al lector no familiarizado con la manipulación de números complejos se le remite al Apéndice C.

Capítulo 2

Espacios vectoriales

En el capítulo anterior hemos introducido las estructuras algebraicas más sencillas. Hemos visto que la reunión de un conjunto, una o dos operaciones internas, y unas ciertas propiedades, nos permite hablar de un grupo, un anillo o un cuerpo. Lógicamente, existen muchas otras estructuras algebraicas posibles. Este capítulo lo dedicamos a introducir la más usada en Ingeniería, y en muchos ámbitos de la Física, por su gran capacidad expresiva: el espacio vectorial. Veremos que, para definir correctamente un espacio vectorial, son necesarios dos conjuntos, una operación interna definida en uno de ellos, una operación externa definida entre ambos, y una serie de propiedades a verificarse entre los elementos de ambos conjuntos y las dos operaciones. Resulta evidente que la complejidad de esta estructura es mayor que las vistas hasta ahora, lo que justifica que le dediquemos un capítulo separado.

2.1. Definición de espacio vectorial

Un espacio vectorial es la estructura algebraica formada por un conjunto V, una operación interna $\$$ bien definida en él, un conjunto $\mathbb{F}$ que tiene, con respecto a sus operaciones internas $(+, \cdot)$, estructura de cuerpo[1], y una operación externa $\#$ bien definida entre V y $\mathbb{F}$. De manera compacta esto suele expresarse de la forma $(V, \$, \#, \mathbb{F})$. Normalmente nos referiremos a esta estructura diciendo que V es un espacio vectorial sobre el cuerpo $\mathbb{F}$ con las operaciones interna $\$$ y externa $\#$. A los elementos de V se les suele llamar *vectores*, y a los de $\mathbb{F}$ *escalares*. Para los vectores emplearemos letras latinas minúsculas (v), mientras que para referirnos a los escalares usaremos letras griegas (α).

Para completar la definición de la estructura, necesitamos especificar las propiedades a verificarse en ésta. Son las siguientes:

1. **Conmutatividad** de $\$$: $\forall u, v \in V : u\$v = v\$u$.

2. **Asociatividad**:

   a) $\forall u, v, w \in V : (u\$v)\$w = u\$(v\$w)$.

   b) $\forall \alpha, \beta \in \mathbb{F}, \forall v \in V : (\alpha \cdot \beta)\#v = \alpha\#(\beta\#v)$.

[1] Ver final del capítulo 1.

3. Existencia de **elemento neutro** con respecto a \$: $\exists 0_V \in V : v\$0_V = v, \forall v \in V$.

4. Existencia de **elemento simétrico**: $\forall v \in V, \exists v' \in V : v\$v' = 0_V$.

5. Existencia de **elemento neutro** con respecto a #: $\exists 0_{\mathbb{F}} : 0_{\mathbb{F}}\#v = v, \forall v \in V$.

6. **Distributividad**:

   a) $\forall \alpha \in \mathbb{F}, \forall u, v \in V : \alpha\#(u\$v) = \alpha\#u\$\alpha\#v$.

   b) $\forall \alpha, \beta \in \mathbb{F}, \forall v \in V : (\alpha + \beta)\#v = \alpha\#v\$\beta\#v$.

2.2. Algunos ejemplos de espacios vectoriales

Para comprender en toda su extensión la definición abstracta de espacio vectorial que hemos ofrecido en la sección anterior, es necesario llevarla a contextos con los que el alumno tenga cierta familiaridad. Por ello, vamos a proponer una serie de ejemplos de complejidad progresiva. Sería deseable que el estudiante comprobara que, efectivamente, las estructuras propuestas a continuación verifican las propiedades que acabamos de enunciar:

- Ejemplo 1: $(\mathbb{R}^2, +, \cdot, \mathbb{R})$. Se trata quizás del espacio vectorial más familiar para el alumno. Es el compuesto por todos los vectores del plano: $v = (v_1, v_2)$, con $v_1, v_2 \in \mathbb{R}$. En este caso \$ es la suma de vectores: $u\$v = u + v = (u_1 + v_1, u_2 + v_2)$. Y # es el producto de un escalar por un vector: $\alpha\#v = (\alpha v_1, \alpha v_2)$. Resulta evidente que esta estructura es generalizable a vectores de un número de componentes indeterminado n, sin más que extender de manera natural las operaciones interna y externa: $(\mathbb{R}^n, +, \cdot, \mathbb{R})$.

- Ejemplo 2: $(M_2(\mathbb{R}), +, \cdot, \mathbb{R})$. Considere ahora el subespacio formado por las matrices reales cuadradas de orden 2. La operación interna, en este caso, corresponde a la suma de matrices (definida, como es sabido, componente a componente), y la operación externa al producto de un escalar por una matriz (el escalar multiplica a cada componente de la matriz). Esta estructura resulta ser una generalización multidimensional del ejemplo anterior. De manera similar, esta estructura podría generalizarse a matrices de dimensiones arbitrarias $(m \times n)$: $(M_{m\times n}(\mathbb{R}), +, \cdot, \mathbb{R})$.

- Ejemplo 3: $(P_2(\mathbb{R}), +, \cdot, \mathbb{R})$. Es perfectamente posible definir espacios vectoriales de polinomios. En este caso se trata del conjunto de polinomios de coeficientes reales y grado menor o igual a 2. Así, podríamos escribir un elemento genérico de este conjunto (un vector del espacio) como $p(x) = ax^2 + bx + c, \forall a, b, c \in \mathbb{R}$. La operación interna sería en este caso la suma de polinomios, definida de la siguiente manera: Si $p_1(x) = a_1x^2 + b_1x + c_1$ y $p_2(x) = a_2x^2 + b_2x + c_2$ son dos vectores del espacio, entonces $p_1(x) + p_2(x) = (a_1 + a_2)x^2 + (b_1 + b_2)x + (c_1 + c_2)$. Por su parte, la operación externa vendría dada por $\alpha \cdot p(x) = \alpha ax^2 + \alpha bx + \alpha c$. Es sencillo concebir la generalización de esta estructura al caso de polinomios de grado máximo arbitrario (n): $(P_n(\mathbb{R}), +, \cdot, \mathbb{R})$.

- Ejemplo 4: $(S, +, \cdot, \mathbb{R})$. Los polinomios vistos arriba son un tipo concreto de función real de variable real. Podemos pensar en generalizar la estructura a otros conjuntos de funciones. Por ejemplo, considere el conjunto S de todas las funciones continuas en $[0, 1]$. Con la suma de funciones (vectores de S) y el producto de un escalar por una función definidos de la manera convencional, puede comprobarse que la estructura propuesta es un espacio vectorial.

- Ejemplo 5: $(\mathbb{C}^3, +, \cdot, \mathbb{C})$. En todos los ejemplos anteriores hemos trabajado con el cuerpo de los números reales ($\mathbb{R}$), pero nada impide considerar también espacios vectoriales sobre $\mathbb{C}$. En este ejemplo proponemos el espacio de los vectores de tres componentes complejas: $v = (v_1, v_2, v_3)$, con $v_1, v_2, v_3 \in \mathbb{C}$. La operación interna es ahora la suma de vectores, que equivaldría a sumar componente a componente números complejos. Y la operación externa es la multiplicación de un escalar (ahora complejo) por cada una de las componentes complejas del vector.

Lógicamente, es posible concebir muy diversos espacios vectoriales. Al final del capítulo se incluyen un conjunto de ejercicios en los que se propone una estructura y se pide determinar si es un espacio vectorial, para lo cual es necesario verificar todas las propiedades de la Sección 2.1. Recomiendo trabajar con paciencia esos ejercicios, pues el uso de las propiedades en contextos distintos contribuye definitivamente a la asimilación de esta importante estructura algebraica.

2.3. Definición de subespacio vectorial

Considere un espacio vectorial genérico $(V, \$, \#, \mathbb{F})$, y sea U un subconjunto de V. Estamos interesados en contestar a esta pregunta: ¿es $(U, \$, \#, \mathbb{F})$ un espacio vectorial? Es decir, nos preguntamos si cualquier “trozo” de V, U, “hereda” la estructura de V.

La pregunta anterior puede contestarse ignorando que V es un espacio vectorial, y aplicando sin más el “test” de propiedades de la sección anterior a $(U, \$, \#, \mathbb{F})$. Pero no es necesario. No es difícil demostrar que si V es un espacio vectorial, sólo hace falta exigir a U tres condiciones:

1. $0_V \in U$.
2. U es *cerrado* con respecto a \$: $\forall u_1, u_2 \in U : u_1 \$ u_2 \in U$.
3. U es *cerrado* con respecto a #: $\forall u \in U, \forall \alpha \in \mathbb{F} : \alpha \# u \in U$.

En cuyo caso decimos que U es un *subespacio vectorial* de V.

Observe que si U no contiene al elemento neutro de V, U no puede ser subespacio vectorial. Normalmente esta es la forma más rápida de detectar que un subconjunto no es subespacio. Las otras dos propiedades expresan una limitación: la acción de las operaciones interna y externa definidas no pueden conllevar la salida de U.

En muchas aplicaciones prácticas, por ejemplo en Teoría de la Señal y en Teoría de la Información, es muy importante detectar subconjuntos *significativos* dentro de un espacio. Se recomienda encarecidamente practicar esta habilidad con los ejercicios que se proponen al final del capítulo.

2.4. Suma y suma directa de espacios vectoriales

Sea el espacio vectorial $(V, \$, \#, \mathbb{F})$, y sean dos subespacios vectoriales U_1, U_2. Llamamos espacio vectorial suma de los subespacios U_1 y U_2 al espacio vectorial $U_1 + U_2$ formado por todos los elementos $u \in V$ de la forma $u = u_1 + u_2$, con $u_1 \in U_1$ y $u_2 \in U_2$.

Tratemos de ilustrar este concepto con un ejemplo sencillo. Considere el espacio $(\mathbb{R}^3, +, \cdot, \mathbb{R})$, y sean los subespacios $U_1 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : y = z = 0\}$ y $U_2 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x = z = 0\}$. Evidentemente, los $u \in \mathbb{R}^3$ pertenecientes a $U_1 + U_2$ serán de la forma $(x, y, z) = (x, 0, 0) + (0, y, 0) = (x, y, 0)$, con lo que podríamos concluir que $U_1 + U_2 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : z = 0\}$; es decir, $U_1 + U_2 = \mathbb{R}^2$.

Supongamos ahora esta situación, que será de interés más adelante: $V = U_1 + U_2$; es decir, el espacio suma de los dos subespacios es el espacio total V. De acuerdo con lo que acabamos de ver, en este caso tendríamos que $v = u_1 + u_2, \forall v \in V$. O lo que es lo mismo: podríamos escribir cualquier elemento de V como la suma de dos vectores, uno de U_1 y otro de U_2. Es perfectamente posible que, para un mismo v, existan varias descomposiciones posibles de elementos de U_1 y U_2 que permitan escribir $v = u_1 + u_2$. Por el contrario, cuando, para cada v, sólo existe un único par de vectores u_1, u_2 tales que $v = u_1 + u_2$, la suma de U_1 y U_2 se dice *directa*, y se representa de la forma: $V = U_1 \oplus U_2$.

Ilustremos estas ideas con dos ejemplos:

1. Ejemplo 1: Considere el espacio $(\mathbb{R}^2, +, \cdot, \mathbb{R})$. Y sean los subespacios $U_1 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x = 0\}$ y $U_2 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y = 0\}$. Evidentemente, en este caso la suma de los dos espacios es directa, ya que para cualquier $(a, b) \in \mathbb{R}^2$, la única descomposición posible con vectores de U_1 y U_2 es $(a, b) = (a, 0) + (0, b)$, con $(a, 0) \in U_1$ y $(0, b) \in U_2$.

2. Ejemplo 2: Sea ahora el espacio $(\mathbb{R}^3, +, \cdot, \mathbb{R})$ y los subespacios $U_1 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : z = 0\}$, $U_2 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x = y = 0\}$ y $U_3 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x = 0, y = z\}$. Observe que, en este caso, $\mathbb{R}^3 = U_1 + U_2 + U_3$, pero $\mathbb{R}^3 \neq U_1 \oplus U_2 \oplus U_3$.

Como evidencia el ejemplo anterior, los conceptos de suma y suma directa de espacios, pese a haber sido introducidas, por simplicidad, para dos subespacios, pueden fácilmente extenderse a un número cualquiera de subespacios.

Finalmente, disponemos de un resultado, bastante sencillo de demostrar, que nos permite identificar de forma inmediata si una suma de dos subespacios es directa: $V = U_1 \oplus U_2$ si y sólo si $V = U_1 + U_2$ y $U_1 \cap U_2 = \{0_V\}$.

2.5. Subespacios vectoriales de dimensión finita

Iniciamos, a partir de esta sección, nuestro interés en los denominados *espacios vectoriales de dimensión finita*; de hecho, a partir de este punto del texto, todos los espacios vectoriales que consideraremos serán de este tipo. Tiene ello que ver con el uso prioritario que tienen estos espacios en la Ingeniería. Nuestro proceder será constructivo, de forma que sólo al final del capítulo podremos caracterizar con precisión este tipo de espacios vectoriales.

2.5.1. El concepto de combinación lineal

Considere un espacio vectorial V en el que, por simplicidad notacional, designamos la operación interna y la externa por $+$ y $\cdot$, respectivamente. Además, seguiremos considerando un cuerpo general $\mathbb{F}$, por lo que, según lo que hemos visto anteriormente, el espacio V vendría dado por $(V, +, \cdot, \mathbb{F})$. Sea ahora la siguiente lista de m vectores cualesquiera de V: $\{v_1, \ldots, v_m\}$. Decimos que un vector v es *combinación lineal* de los m elementos de la lista de vectores anterior, si v puede escribirse de la forma:

$$v = \alpha_1 v_1 + \cdots + \alpha_m v_m = \sum_{i=1}^{m} \alpha_i v_i,$$

donde los α_i son unos ciertos elementos de $\mathbb{F}$.

Considere ahora todos los posibles vectores que pueden obtenerse como combinación lineal de los m elementos de la lista. Podemos reunirlos en un conjunto, que denominaremos C:

$$C = \{\alpha_1 v_1 + \cdots + \alpha_m v_m, \forall \alpha_i \in \mathbb{F}\}.$$

Este conjunto suele escribirse de manera más compacta como:

$$C = \operatorname{span}(v_1, \ldots, v_m),$$

en donde, mediante la palabra inglesa “span” queremos expresar que C es “generado” por los vectores entre paréntesis, a los que denominaremos *sistema generador* de C.

Ilustremos estas ideas brevemente con un ejemplo sencillo. Considere el espacio $(\mathbb{R}^3, +, \cdot, \mathbb{R})$, y sea la lista de vectores de este espacio $\{(2,1,3), (1,0,1)\}$. ¿$(7,2,9) \in \operatorname{span}((2,1,3),(1,0,1))$? Evidentemente, la respuesta es sí, pues si hacemos $\alpha_1 = 2$ y $\alpha_2 = 3$, resulta que $(7,2,9) = 2(2,1,3) + 3(1,0,1)$. ¿Podría decirse que $\mathbb{R}^3 = \operatorname{span}((2,1,3),(1,0,1))$? La respuesta ahora es negativa. Baste, como contraejemplo, el caso de $(1,0,0)$: $(1,0,0) \in \mathbb{R}^3$, pero $(1,0,0) \notin \operatorname{span}((2,1,3),(1,0,1))$.

Reflexione y convénzase de estos dos resultados elementales:

1. $\operatorname{span}(v_1, \ldots, v_m)$ es siempre un subespacio vectorial de V.
2. $v_j \in \operatorname{span}(v_1, \ldots, v_m), \quad \forall j = 1, \ldots, m.$

Con lo visto hasta el momento, podemos concluir tentativamente que V es un espacio de dimensión finita si existe algún sistema generador de V. Nos queda por determinar, para completar la definición de espacio vectorial de dimensión finita, qué es la *dimensión* de un espacio vectorial. Lo veremos enseguida.

2.5.2. El concepto de independencia lineal

Sea $\{v_1, \ldots, v_m\}$ una lista de vectores de V. Esta lista se dice *linealmente independiente* si y sólo si

$$\alpha_1 v_1 + \cdots + \alpha_m v_m = 0_V, \text{ sii } \alpha_i = 0, \forall i = 1, \ldots, m.$$

En caso contrario, es decir, si la igualdad es posible sin que que *todos* los α_i sean nulos, la lista se dice *linealmente dependiente.*

Veamos un ejemplo ilustrativo sencillo en $\mathbb{R}^2$. Sea la lista $\{(1,0),(-1,1)\}$. ¿Es esta lista linealmente independiente? Para que sea linealmente independiente: $\alpha_1(1,0)+\alpha_2(-1,1) = (0,0)$ sólo si $\alpha_1 = \alpha_2 = 0$. Efectivamente, si resolvemos la ecuación vectorial anterior, vemos que su solución es $\alpha_1 = \alpha_2 = 0$, por lo que podemos concluir que la lista es linealmente independiente.

Geométricamente, dos vectores $\{v_1, v_2\}$ de un cierto espacio V son linealmente dependientes si son colineales: $v_1 = kv_2$, con $k \in \mathbb{F}$. Convénzase de ello a partir de las definiciones anteriores.

2.5.3. Conceptos de base de un espacio y coordenadas de un vector

Se llama *base* de un espacio V a un conjunto de vectores de V que cumple dos condiciones:

1. El conjunto es linealmente independiente.

2. El conjunto es un sistema de generador de V.

Considere el ejemplo con el que terminábamos la subsección anterior: $\{(1,0),(-1,1)\}$. hemos visto que estos dos vectores son linealmente independientes (primera condición), pero ¿son un sistema generador de $\mathbb{R}^2$?

Para que sean un sistema generador, $\forall v \in V : v = \alpha_1(1,0) + \alpha_2(-1,1)$, para unos ciertos $\alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{R}$. Si escribimos v como (x, y):

$$(x, y) = \alpha_1(1,0) + \alpha_2(-1,1) = (\alpha_1 - \alpha_2, \alpha_2).$$

Esta ecuación vectorial tiene como solución $\alpha_1 = x + y$, $\alpha_2 = y$. Por tanto, cualesquiera que sean los valores de x e y, es posible encontrar un par de α_1 y α_2 que satisfagan la ecuación vectorial. Concluimos, por tanto, que $\{(1,0),(-1,1)\}$ son un sistema generador, y, como también son linealmente independientes, constituyen una base de $\mathbb{R}^2$.

Reflexione sobre estos tres resultados especialmente interesantes:

1. Todo sistema de generadores de V puede reducirse a una base de V.

2. Todo espacio de dimensión finita tiene base.

3. Dado U un subespacio vectorial de V (de dimensión finita), entonces existe un único W subespacio de V tal que $V = U \oplus W$.

Una de las ventajas que incorpora el concepto de base es la posibilidad de manipular vectores de espacios abstractos mediante vectores de coordenadas escalares. Considere el espacio V de dimensión finita, en el que hemos identificado una base $B_V = \{v_1, \ldots, v_m\}$. Como acabamos de ver, esto significa que $\forall v \in V : v = \alpha_1 v_1 + \cdots + \alpha_m v_m$. Obsérvese que, puesto que la base es estática, cambiar v por w en la ecuación anterior supone encontrar unos α_i distintos para ese nuevo w. Es decir, que, para una base dada, existe una correspondencia biunívoca entre cada vector de V y los α_i que lo *representan* en la base. Los α_i suelen reunirse en un vector columna que designaremos mediante $\boldsymbol{\alpha}$:

$$\boldsymbol{\alpha} = \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \vdots \\ \alpha_m \end{pmatrix}.$$

Diremos así que $\boldsymbol{\alpha}$ es el *vector de coordenadas* de v en la base B_V. Evidentemente, si cambiamos de base, a una base B'_V, las coordenadas de v cambiarán a $\boldsymbol{\alpha}'$. En el próximo capítulo, ya en el contexto de las aplicaciones lineales, retomaremos este importante hecho (véase la Sección 3.4).

El estudiante suele tener una intuición geométrica del concepto de base, particularmente en $\mathbb{R}^2$. Así, entiende que el conjunto $\{(1,0),(0,1)\}$ es una base de este espacio, y que $\{(1,-1),(0,1)\}$ también lo es. Pero en esta obra vamos a necesitar manipular espacios más abstractos.

En la Sección 2.2 hemos visto algunos ejemplos de estos espacios. Consideremos el caso de $P_2(\mathbb{R})$, el espacio vectorial formado por todos los polinomios, $p(x)$, de coeficientes reales con grado menor o igual a 2. Sea el conjunto $\left\{x^2, x, 2x-1\right\}$. ¿Es una base de $P_2(\mathbb{R})$?

Según la definición vista un poco más arriba, hemos de comprobar si el conjunto es linealmente independiente, y si es un sistema generador.

Para que el conjunto $\left\{x^2, x, 2x-1\right\}$ sea linealmente independiente es preciso que

$$\alpha_1 x^2 + \alpha_2 x + \alpha_3 (x-a) = 0, \text{ sii } \alpha_i = 0.$$

Efectivamente, resulta inmediato verificar que $\alpha_i = 0, \forall i$.

El conjunto dado será un sistema generador si $\forall p(x) \in P_2(\mathbb{R}) : p(x) = \alpha_1 x^2 + \alpha_2 x + \alpha_3(x-1)$. Supongamos un polinomio genérico $p(x) = ax^2 + bx + c$. Es sencillo verificar que, en este caso, obtenemos $\alpha_1 = a$, $\alpha_2 = b + c$ y $\alpha_3 = -c$. Es decir, siempre podemos encontrar, para cualesquiera valores de a, b, c, los correspondientes valores de $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ que hacen posible la ecuación polinómica de partida. Concluimos, pues, que el conjunto $\left\{x^2, x, 2x-1\right\}$ es una base de $P_2(\mathbb{R})$.

¿Sería capaz de demostrar que las coordenadas del polinomio $2x^2 - 5$ en esta base son el vector columna $\boldsymbol{\alpha} = \begin{pmatrix} 2 \\ -5 \\ 5 \end{pmatrix}$?

2.5.4. Concepto de dimensión

No es difícil demostrar que cualquier par de bases de un espacio vectorial de dimensión finita poseen la misma longitud. Precisamente llamamos *dimensión* de un espacio vectorial de dimensión finita a esa longitud, y la designamos mediante $n = \dim(V)$.

Seguidamente enumeramos sin demostración un conjunto de resultados interesantes en la manipulación de espacios vectoriales de dimensión finita:

1. Si un espacio V de dimensión finita tiene dimensión n, entonces cualquier conjunto de n vectores linealmente independientes es base de V. Es decir, no hace falta comprobar que el conjunto sea un sistema generador.

2. En un espacio V, de dimensión n, no es posible encontrar listas de más de n vectores linealmente independientes.

3. Si U_1 y U_2 son dos subespacios vectoriales de V, se tiene que:

$$\dim(U_1 + U_2) = \dim(U_1) + \dim(U_2) - \dim(U_1 \cap U_2).$$

4. Dados $U_1, \ldots, U_m$ subespacios vectoriales de V tales que:

   a) $V = U_1 + \cdots + U_m$,
   b) $\dim(V) = \dim(U_1) + \cdots + \dim(U_m)$,

   se tiene entonces que $V = U_1 \oplus \cdots \oplus U_m$.

5. Si U es un subespacio vectorial de V, entonces $\dim(U) \leq \dim(V)$.

2.5.5. La idea de estructura en espacios vectoriales

Sea V un espacio de dimensión finita, y sea U un subespacio vectorial de V. Los elementos de U serán, por lo general, aquellos elementos de V que cumplan una determinada *condición de pertenencia*. Por ejemplo, en el espacio $\mathbb{R}^3$ podemos definir un subespacio U como el formado por aquellos vectores de $\mathbb{R}^3$, (x, y, z), que cumplen la condición de pertenencia $x + y + z = 0$. Como puede verse, es muy sencillo saber si, dado un vector, pertenece a U o no: basta con sumar sus tres componentes y ver si el resultado es 0. Pero esto nada nos dice de la *estructura* de U: ¿cómo son sus elementos?, ¿cómo se pueden generar?, ¿cuál es la dimensión de U, ¿cómo puede obtenerse una base de U?

A grandes rasgos, el procedimiento a seguir para dar respuesta a las preguntas anteriores es el siguiente:

1. Tomo un $v \in V$ genérico.

2. Le aplico la condición de pertenencia a U.

3. Observo las *consecuencias estructurales* sobre v.

4. Deduzco un sistema generador de U.

5. Obtengo una base y la dimensión de U.

Como ilustración, vamos a emplear este procedimiento con el ejemplo anterior:

1. Tomo un $v \in V$ genérico: (x, y, z).

2. Le aplico la condición de pertenencia a U: $x + y + z = 0$.

3. Observo las *consecuencias estructurales* sobre v: $(x, y, -(x + y)), \forall x, y \in \mathbb{R}$.

4. Deduzco un sistema generador de U: $x(1, 0, -1) + y(0, 1, -1), \forall x, y \in \mathbb{R}$. Es decir: $U = \text{span}((1, 0, -1), (0, 1, -1))$.

5. Obtengo una base y la dimensión de U: Como $(1, 0, -1)$ y $(0, 1, -1)$ son linealmente independientes, $B_U = \{(1, 0, -1), (0, 1, -1)\}$ y, consecuentemente, $\dim(U) = 2$.

2.6. Ejercicios propuestos

[E-2.1] En $\mathbb{R}^2$ se define la siguiente operación interna: $(v_1, v_2)\$(w_1, w_2) = (v_1 + w_1, v_2 + w_2)$. Además, sobre $\mathbb{R}$ se define una operación externa: $\alpha\#(v_1, v_2) = (\alpha v_1, 0), \forall \alpha \in \mathbb{R}$. ¿Es $(\mathbb{R}^2, \$, \#, \mathbb{R})$ un espacio vectorial?

[E-2.2] En $\mathbb{R}^2$ se define la siguiente operación interna: $(v_1, v_2)\$(w_1, w_2) = (v_1 + w_1, v_2 + w_2)$. Además, sobre $\mathbb{R}$ se define una operación externa: $\alpha\#(v_1, v_2) = (\alpha + \alpha v_1 - 1, \alpha + \alpha v_2 - 1), \forall \alpha \in \mathbb{R}$. ¿Es $(\mathbb{R}^2, \$, \#, \mathbb{R})$ un espacio vectorial?

[E-2.3] ¿Es el conjunto de todas las matrices reales cuadradas de orden 2 con diagonal formada por unos, con respecto a las operaciones convencionales de suma de matrices y producto de un escalar por una matriz, un espacio vectorial? Razone la respuesta.

[E-2.4] Sea V el conjunto de todos los números reales positivos. Sea $\mathbb{R}$ el cuerpo de todos los números reales. Considérese la estructura algebraica compuesta por $(V, \$, \#, \mathbb{R})$, donde \$ es una operación interna definida como

$$u\$v = u \cdot v, \forall u, v \in V;$$

y # es una operación externa dada por

$$\alpha\#u = u^\alpha, \forall \alpha \in \mathbb{R}.$$

Determine razonadamente si la estructura así descrita es o no un espacio vectorial.

[E-2.5] Comprobar si los siguientes subconjuntos son subespacios vectoriales de $\mathbb{R}^3$:

1. $V_1 = \{(x, y, z) : x^3 + y^3 + z^3 = 1\}$.
2. $V_2 = \{(x, y, z) : x + \alpha z = y + z = 0, \quad \alpha \in \mathbb{R}\}$.
3. $V_3 = \{(x, y, z) : 8x + z = 2, y + z = 0\}$.

[E-2.6] ¿Es el conjunto de todas las matrices de $M_2(\mathbb{R})$ con determinante nulo, con respecto a las operaciones convencionales de suma de matrices y producto de una matriz por un escalar, un subespacio vectorial de $M_2(\mathbb{R})$?

[E-2.7] Sea $P_2(\mathbb{R})$ el espacio de los polinomios con coeficientes reales de grado menor o igual a dos.

1. Demostrar que el conjunto V de los polinomios de la forma $p(t) = at^2 + (a + b)t + 5a + b$, con a y b reales, es un subespacio vectorial de P_2.
2. Sea W el subespacio generado por los polinomios $q(t) = 2t^2 + 3t + 11$ y $r(t) = 3t^2 + t + 13$. Demostrar que $V = W$.

[E-2.8] Sea F el espacio vectorial de las funciones de $\mathbb{R}$ en $\mathbb{R}$. Sean:

$$A = \{f \in F : f(-x) = f(x), \quad \forall x \in \mathbb{R}\},$$

y

$$B = \{f \in F : f(-x) = -f(x), \quad \forall x \in \mathbb{R}\}.$$

Demuestre que los conjuntos A y B son subespacios vectoriales de F y que $F = A \oplus B$.

[E-2.9] Para los subespacios U y W indicados, demuestre que son subespacios del correspondiente espacio V, y estudie si su suma es directa:

1. V es el espacio de todas las matrices cuadradas de orden 2 reales. U es el subconjunto de todas las matrices de V con segunda fila de ceros, y W el subconjunto de todas las matrices con la segunda columna de ceros.
2. $V = \mathbb{R}^3$. $U = \{(a, b, 0), \quad a, b \in \mathbb{R}\}$, $W = \{(0, b, c), \quad b, c \in \mathbb{R}\}$.
3. $V = \mathbb{R}^3$. $U = \{(a, b, 0), \quad a, b \in \mathbb{R}\}$, $W = \{(0, 0, c), \quad c \in \mathbb{R}\}$.

[E-2.10] Sea el espacio vectorial $\mathbb{C}^3$ de los vectores de dimensión 3 formados por tres números complejos: $(a, b, c), \forall a, b, c \in \mathbb{C}$. Estudie razonadamente si los siguientes subconjuntos de $\mathbb{C}^3$ son o no subespacios vectoriales:

1. $M_1 = \{(a, b, c) \in \mathbb{C}^3 : a + b = 1\}$.
2. $M_2 = \{(a, b, c) \in \mathbb{C}^3 : a + b \geq 0\}$.
3. $M_3 = \{(a, b, c) \in \mathbb{C}^3 : a \in \mathbb{R}\}$.

[E-2.11] Estudiar si la familia de polinomios de $P_3(\mathbb{R})$ $\{1, at^2, 2t^2 - 1, 2t^3 - 3t; \quad a \neq 0\}$ es un conjunto de vectores linealmente independiente.

[E-2.12] Encuentre para qué valores de a y b son linealmente dependientes los vectores $(1, -1, 2)$ y $(2, a, b)$.

[E-2.13] Sea $P_3(\mathbb{R})$ el espacio de los polinomios de grado menor o igual a 3 y coeficientes reales. Sean los subespacios:

- $A = \{p(t) \in P_3(\mathbb{R}) : tp'(t) - kp(t) = 0, \quad k \in \mathbb{R}\}$
- $B = \{p(t) \in P_3(\mathbb{R}) : t^2p''(t) - tp'(t) = 0\}$

1. Calcular, en función del valor de k, la dimensión y una base de A.
2. Calcular la dimensión y una base de B.

[E-2.14] Determine la forma del subespacio de $\mathbb{R}^3$ que tiene por base el conjunto $\{(1, 1, -2), (-1, 2, -1)\}$.

[E-2.15] Sea el subespacio vectorial de $\mathbb{R}^3$ $\{(x_1, x_2, x_3) : x_1 - 2x_2 + x_3 = 0\}$. Calcule una base y la dimensión de este subespacio.

[E-2.16] ¿Es $\{(1, 0), (1, 1), (0, 1)\}$ un sistema de generadores de $\mathbb{R}^2$?

[E-2.17] ¿Es $\{(1, 1, 0), (0, 1, 1)\}$ un sistema de generadores de $\mathbb{R}^3$?

[E-2.18] ¿Es $\{(1,1),(0,1)\}$ una base de $\mathbb{R}^2$? En caso afirmativo, calcule el vector de coordenadas de $(6,5)$ en dicha base.

[E-2.19] Sea $P_2(\mathbb{R})$. Sean $p_1 = t+1$, $p_2 = t-1$, $p_3 = (t-1)^2$. ¿Forman estos vectores una base de $P_2(\mathbb{R})$? En caso afirmativo, calcule las coordenadas de $2t^2 - 5t + 9$ en dicha base.

[E-2.20] Sea el espacio de todas las matrices cuadradas de orden 2 reales, y sea el conjunto $\{\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\}$. ¿Forma dicho conjunto una base del espacio? En caso afirmativo, calcule las coordenadas de la matriz $\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 4 & -7 \end{pmatrix}$.

[E-2.21] Sea $A = \{p(x) \in P_3(\mathbb{R}) : p(1) = p'(1) = 0\}$. ¿Cuál es la dimensión de A? Proporcione una base de A.

[E-2.22] Sea $W = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x+y+z = 0\}$ y sea $v = (2,-1,-1) \in W$. Se pide:

1. Comprobar que $B_W = \{(-1,0,1),(-1,3,-2)\}$ es una base de W.
2. Hallar las coordenadas de v en B_W.
3. Hallar las coordenadas de v en la base $\{(1,1,0),(0,1,1),(2,0,1)\}$.

[E-2.23] Sea $S = \{A \in M_{2\times 3}(\mathbb{R}) : a_{11} + a_{12} + a_{13} = 0, 2a_{22} = a_{11}\}$. Se pide:

1. Comprobar que S es un subespacio vectorial de $M_{2\times 3}(\mathbb{R})$.
2. Determinar la dimensión de S y hallar una base.

[E-2.24] Sea $A = \{e_1, e_2, e_3\}$ una base de $\mathbb{R}^3$. Sea ahora $B = \{ae_1 + be_2, ce_2 + de_3, ee_3 + fe_1\}$, con a,b,c,d,e,f reales positivos. ¿Es B base de $\mathbb{R}^3$?

[E-2.25] Sean $A = \{a_1, a_2, a_3\}$ y $B = \{b_1, b_2, b_3\}$ dos bases de $\mathbb{R}^3$. Se sabe que $a_1 = b_1 - 3b_2 + 4b_3$, $a_2 = b_2 + b_3$, $a_3 = b_1 + b_2 + b_3$. Halle la matriz que transforma las coordenadas de un vector de $\mathbb{R}^3$ en la base B en sus coordenadas en la base A.

2.7. Problemas propuestos

[P-2.1] Sea $M_3(\mathbb{R})$ el espacio de las matrices reales cuadradas de dimensión 3 con las operaciones suma de matrices y producto de un escalar por una matriz convencionales. Sea S el subconjunto de $M_3(\mathbb{R})$ formado por todas las matrices con la estructura $\begin{pmatrix} a & b & 0 \\ c & d & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, con $a,b,c,d \in \mathbb{R}$. ¿Es S un subespacio vectorial de $M_3(\mathbb{R})$? Justifique su respuesta.

[P-2.2] Sea el espacio vectorial $(\mathbb{C}^2, +, \cdot, \mathbb{C})$ con las operaciones suma y producto convencionales. ¿Es el conjunto $\{(1+i,0),(1-i,0)\}$ una base de dicho espacio?

[P-2.3] Sea el espacio $(\mathbb{R}^4, +, \cdot, \mathbb{R})$ con las operaciones suma y producto por un escalar convencionales, y sean los conjuntos $S = \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 : x = y\}$ y $M = \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 : z = t\}$. Estudie si la suma de S y M es directa.

[P-2.4] En $\mathbb{R}^3$, sean los siguientes subespacios: $M = \text{span}((1 + m, 4, 2), (5, 6, -(1 + m)))$ y $N = \text{span}((5 + 2m, 10, 0))$. Calcule razonadamente el valor de m que hace que la suma de M y N **no** sea directa.

[P-2.5] Sea V el subespacio de $M_3(\mathbb{R})$ (con la suma, y producto de un escalar por una matriz convencionales) dado por $V = \{X \in M_3(\mathbb{R}) : AX = XA, A \in M_3(\mathbb{R})\}$. Conteste razonadamente:

1. ¿Es V subespacio vectorial de $M_3(\mathbb{R})$?
2. ¿Cuál es la dimensión de V si $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}$?

[P-2.6] Sea el conjunto

$$H = \{\begin{pmatrix} a & b \\ -b^* & a^* \end{pmatrix}, \quad \forall a, b \in \mathbb{C}\}.$$

La estructura algebraica $(H, +, \cdot, \mathbb{R})$, donde $+$ y $\cdot$ son, respectivamente, la suma y producto de matrices convencionales, ¿es un espacio vectorial? Razone su respuesta.

[P-2.7] Sea el espacio vectorial $(\mathbb{C}^3, +, \cdot, \mathbb{C})$ y sea $z = x + iy \in \mathbb{C}$. ¿Son los vectores (z^*, z, z), (z, z^*, z) y (z, z^*, z^*) linealmente independientes? Razone la respuesta.

[P-2.8] Se definen, dentro del espacio vectorial de matrices cuadradas de orden 2 reales ($M_2(\mathbb{R})$), los siguientes conjuntos:

$$S_1 = \{\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} : a = d\}.$$

$$S_2 = \{\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} : b = d\}.$$

Conteste razonadamente: ¿$M_2(\mathbb{R}) = S_1 + S_2$? ¿$M_2(\mathbb{R}) = S_1 \oplus S_2$?

[P-2.9] Sea $P_3(\mathbb{R})$. ¿Son los siguientes conjuntos subespacios de $P_3(\mathbb{R})$? Razone sus respuestas.

1. $U_1 = \{p(x) \in P_3(\mathbb{R}) : 2p(0) = p(1)\}$.
2. $U_2 = \{p(x) \in P_3(\mathbb{R}) : p(x) \geq 0\}$.

[P-2.10] Sea A el espacio vectorial compuesto por todas las funciones reales de variable real. Estudie para qué valores de k el conjunto $B = \{f \in A : f(1) = k\}$ es un subespacio vectorial.

[P-2.11] Sea el espacio $(M_3(\mathbb{R}), +, \cdot, \mathbb{R})$ con las operaciones suma y producto convencionales. Sea U el conjunto de todas las matrices de $M_3(\mathbb{R})$ que admiten la forma:

$$\begin{pmatrix} -a+b+c & c & b \\ c & a-b+c & a \\ b & a & a+b-c \end{pmatrix}.$$

Determine razonadamente si U es un subespacio vectorial de $M_3(\mathbb{R})$.

[P-2.12] Sea el conjunto $V = \{x \in \mathbb{R} : x \geq 0\}$. Sea la operación interna definida como $x\$y = xy + 1$, $\forall x, y \in V$; y la operación externa definida como $\alpha \# x = \alpha^2 x$, $\forall \alpha \in \mathbb{R}$. Determine razonadamente si la estructura algebraica $(V, \$, \#, \mathbb{R})$ es un espacio vectorial.

[P-2.13] Sea V el espacio vectorial de todas las funciones continuas definidas en el intervalo $[0, \pi]$ con la suma y producto por un escalar convencionales. Sean ahora los vectores de V $f = 1$, $g = x$, $h = \cos x$, y $j = \cos^2(x/2)$. Determine razonadamente si el conjunto $\{f, g, h, j\}$ es linealmente independiente.

[P-2.14] Sean a, b, c tres números reales diferentes. ¿Es el conjunto $\{(1,1,1), (a,b,c), (a^2, b^2, c^2)\}$ linealmente independiente? Razone su respuesta.

[P-2.15] Sea el espacio $M_2(\mathbb{R})$ formado por las matrices reales cuadradas de orden 2 con la suma de matrices y el producto de una matriz por un escalar convencionales. Conteste razonadamente: ¿Cuáles de los siguientes subconjuntos son subespacios vectoriales de $M_2(\mathbb{R})$?

1. El subconjunto de todas las matrices invertibles.
2. El subconjunto de todas las matrices simétricas.
3. El subconjunto de todas las matrices antisimétricas.
4. El subconjunto de todas las matrices de traza nula.

[P-2.16] Sean $S = \text{span}((2,5,3), (1,0,2))$ y $T = \text{span}((2,0,5), (3,5,5))$. Obtenga razonadamente la dimensión del espacio $S \cap T$.

[P-2.17] Los vectores v y w son linealmente independientes en un cierto espacio vectorial. Conteste razonadamente: ¿Son v y $v + w$ linealmente independientes?

[P-2.18] En $\mathbb{R}^3$ hay definidas dos bases: $B_A = \{(1,0,1), (0,2,0), (1,2,3)\}$ y $B_B = \{(1,0,0), (2,0,1), (0,1,3)\}$. Obtenga la matriz de cambio de base que permite obtener las coordenadas de un vector de $\mathbb{R}^3$ en la base B_A a partir de sus coordenadas en la base B_B.

[P-2.19] Determine razonadamente si los siguientes conjuntos son subespacios vectoriales de $P_3(\mathbb{R})$:

1. $S_1 = \{p(x) \in P_3(\mathbb{R}) : p(x) = x^3 + ax + b\}$.
2. $S_2 = \{p(x) \in P_3(\mathbb{R}) : p(x) = ax^3 + b\}$.

[P-2.20] Se consideran los subespacios de $M_2(\mathbb{R})$:

$$V_1 = \{\begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix}, \forall a, b \in \mathbb{R}\} \text{ y } V_2 = \{\begin{pmatrix} c & d \\ e & -c \end{pmatrix}, \forall c, d, e \in \mathbb{R}\}.$$

1. Halle una base de V_1 y otra de V_2.
2. Conteste razonadamente: ¿$V_1 \oplus V_2 = M_2(\mathbb{R})$?

[P-2.21] Determine razonadamente cuáles de los siguientes subconjuntos son subespacios vectoriales:

1. $S_1 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : xy = 0\}$.
2. $S_2 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x = -z\}$.
3. $S_3 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x = z - y\}$.
4. $S_4 = \{p(x) \in P_3(\mathbb{R}) : p(x) = ax^3 + b\}$.

[P-2.22] Obtenga una base del subespacio de $M_2(\mathbb{R})$: $M = \left\{\begin{pmatrix} a+b+3c & 2a-b \\ -a-c & a+2b+5c \end{pmatrix}, \forall a, b, c \in \mathbb{R}\right\}$.

[P-2.23] Sean los conjuntos $V_1 = \left\{\begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix}, \forall a, b \in \mathbb{R}\right\}$ y $V_2 = \left\{\begin{pmatrix} c & d \\ e & -c \end{pmatrix}, \forall c, d, e \in \mathbb{R}\right\}$. Calcule:

1. Una base de V_1.
2. Una base de V_2.
3. Una base de $V_1 + V_2$.
4. Una base de $V_1 \cap V_2$.

[P-2.24] Sea un cierto espacio vectorial $(V, +, \cdot, \mathbb{R})$, y sea $\{u, v\}$ un subconjunto de V linealmente independiente. Considere ahora $u', v' \in V$ tales que $u' = au + bv$ y $v' = cu + dv$ $(a, b, c, d \in \mathbb{R})$. Conteste razonadamente: ¿Bajo qué condiciones el conjunto $\{u', v'\}$ es linealmente independiente?

[P-2.25] Sea la estructura algebraica compuesta por el conjunto $\mathbb{R}^2$, el cuerpo $\mathbb{C}$, una operación interna \$, y una operación externa #. Las operaciones están definidas de la forma siguiente:

- $u\$v = (u_1 + v_1, u_2 + v_2)$, con $u = (u_1, u_2)$ y $v = (v_1, v_2)$.
- $\alpha\#u = (au_1 - bu_2, bu_1 + au_2)$, con $\alpha = a + ib \in \mathbb{C}$.

Conteste razonadamente: ¿Es esta estructura algebraica un espacio vectorial?

[P-2.26] Sea V el conjunto de todas las funciones reales de variable real. Este conjunto, con la suma de funciones y el producto de un escalar por una función convencionales, posee, sobre el cuerpo $\mathbb{R}$, estructura de espacio vectorial. Determine razonadamente si los siguientes subconjuntos de V son subespacios vectoriales:

1. $V_1 = \{f \in V : f(3) = 0\}$.
2. $V_2 = \{f \in V : f(1) = f(2)\}$.
3. $V_3 = \{f \in V : f(-x) = -f(x)\}$.

[P-2.27] Considere el espacio vectorial $P_3(\mathbb{R})$, y sean los polinomios de este espacio $p_1(t) = t^3 - 3t$, $p_2(t) = t^3 - t^2 - t$, $p_3(t) = t^2 - t - 1$, y $q(t) = t + 1$. Conteste razonadamente: ¿$q(t) \in \operatorname{span}(p_1, p_2, p_3)$?

[P-2.28] Sean los subespacios de $\mathbb{R}^3$: $A = \operatorname{span}((3,2,1))$ y $B = \operatorname{span}((2,1,4),(0,1,3))$. Conteste razonadamente: ¿$\mathbb{R}^3 = A \oplus B$?

[P-2.29] Sea $S = \{X \in M_2(\mathbb{R}) : XA = AX\}$, con $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \alpha & 1 \end{pmatrix}$, $\alpha \neq 0$. ¿Es S subespacio vectorial de $M_2(\mathbb{R})$?

[P-2.30] Considere los siguientes subespacios de $\mathbb{R}^4$: $F = \{(x_1, x_2, x_3, x_4) \in \mathbb{R}^4 : x_2 + 2x_4 = 0\}$ y $G = \{(x_1, x_2, x_3, x_4) \in \mathbb{R}^4 : x_1 + x_2 = x_1 + x_3 = x_1 - x_4\}$. Estudie si su suma es directa.

[P-2.31] Determine razonadamente si los siguientes subconjuntos son subespacios vectoriales de los espacios correspondientes: (a) $U_1 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 = y^2\}$. (b) $U_2 = \{p \in P_3(\mathbb{R}) : p(0)p(1) = 0\}$.

[P-2.32] Sean las bases de $\mathbb{R}^2$: $B_1 = \{(0,1),(1,0)\}$ y $B_2 = \{(1/\sqrt{2}, 1/\sqrt{2}), (-1/\sqrt{2}, 1/\sqrt{2})\}$. Obtenga razonadamente: (a) la matriz de cambio de base que transforma vectores de coordenadas de la base B_1 a la base B_2, (b) la matriz de cambio de base que transforma vectores de coordenadas de la base B_2 a la base B_1. Las matrices obtenidas, ¿deben ser ortogonales? Justifique su respuesta.

[P-2.33] Sea la estructura algebraica compuesta por el conjunto $\mathbb{R}^2$, el cuerpo $\mathbb{R}$, una operación interna \$, y una operación externa #. Las operaciones están definidas de la forma siguiente:

- $u\$v = (u_1 + v_1, u_2 + v_2)$, con $u = (u_1, u_2)$ y $v = (v_1, v_2)$.
- $\alpha \# u = (\alpha u_1, u_2)$, con $\alpha \in \mathbb{R}$.

Conteste razonadamente: ¿Es esta estructura algebraica un espacio vectorial?

[P-2.34] Sea el espacio $P_2(\mathbb{R})$ con las operaciones interna y externa convencionales. Considere el subconjunto A de $P_2(\mathbb{R})$ formado por todos los polinomios que tienen como raíz al número real c. Se pide: (a) Demuestre razonadamente que A es un subespacio vectorial. (b) Obtenga una base de A.

[P-2.35] Sea el espacio $P_2(\mathbb{R})$ con las operaciones interna y externa convencionales. Considere el subconjunto Q de $P_2(\mathbb{R})$ formado por $\{1, x - \alpha, (x - \alpha)^2\}$, con $\alpha \in \mathbb{R}$. Se pide: (a) Demuestre razonadamente que Q es una base de $P_2(\mathbb{R})$. (b) Obtenga las coordenadas de $6x^2 - 2x + 3$ en dicha base.

[P-2.36] Sea el espacio vectorial $(\mathbb{C}^2, +, \cdot, \mathbb{C})$ con las operaciones interna y externa convencionales, y sean los vectores $u = (1+i, 2i)$ y $v = (1, 1+i)$. Conteste razonadamente: (a) ¿Son u y v linealmente independientes? (b) ¿Y si el espacio al que pertenecieran fuera $(\mathbb{C}^2, +, \cdot, \mathbb{R})$?

[P-2.37] Sea el espacio $(\mathbb{R}^3, +, \cdot, \mathbb{R})$ con las operaciones interna y externa convencionales. Considere los subespacios $U = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x + y + z = 0\}$ y $V = \text{span}((1, 2, 3))$. Conteste razonadamente: ¿$\mathbb{R}^3 = U \oplus V$?

[P-2.38] Sea el polinomio de $P_3(\mathbb{R})$: $p(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$, con $a \neq 0$. ¿Es el conjunto $\{p(x), p'(x), p''(x), p'''(x)\}$ una base de este espacio?

[P-2.39] Sea el espacio $\mathbb{R}^2$, y sean los subespacios $W_1 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : ax + by = 0, a, b \in \mathbb{R}\}$ y $W_2 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : cx + dy = 0, c, d \in \mathbb{R}\}$. ¿En qué condiciones $\mathbb{R}^2 = W_1 \oplus W_2$?

[P-2.40] ¿Qué valores han de tomar m y n para que el vector $(1, m, 4, n) \in \text{span}((2, -1, 2, 3), (1, 3, 2, 1))$?

[P-2.41] Considere el siguiente subconjunto de $P_3(\mathbb{R})$: $\{1, x - h, (x - h)^2, (x - h)^3\}$, con $h \in \mathbb{R}$. (a) Demuestre que es una base de $P_3(\mathbb{R})$. (b) Obtenga las coordenadas del vector $5x^3 + 6x^2 - 4x + 2$ en la base anterior cuando $h = 2$.

[P-2.42] Sea el subconjunto de $M_2(\mathbb{R})$: $S = \{X \in M_2(\mathbb{R}) : X = aI + bB, \forall a, b \in \mathbb{R}\}$, donde $B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 4 \end{pmatrix}$ e I es la matriz identidad. Conteste razonadamente: ¿Es S un subespacio vectorial de $M_2(\mathbb{R})$?

[P-2.43] Sea el conjunto $\mathbb{R}^2$, sobre el que está definida la operación interna convencional $(x_1, y_1)\$(x_2, y_2) = (x_1 + x_2, y_1 + y_2)$, y la operación externa # definida como $\lambda\#(x, y) = (\lambda^3 x, \lambda^3 y)$, con $\lambda \in \mathbb{R}$. Conteste razonadamente: ¿Es esta estructura algebraica un espacio vectorial?

[P-2.44] Considere el espacio vectorial $P_2(\mathbb{R})$ con las operaciones interna y externa convencionales. Sean los subconjuntos de $P_2(\mathbb{R})$: $F = \{p(x) \in P_2(\mathbb{R}) : p(x) = ax^2 - ax + 2a, a \in \mathbb{R}\}$ y $G = \{p(x) \in P_2(\mathbb{R}) : p(x) = (2\alpha - \beta)x^2 + \alpha x - 2\beta, \alpha, \beta \in \mathbb{R}\}$. Conteste razonadamente: (a) ¿Son F y G subespacios vectoriales de $P_2(\mathbb{R})$? (b) ¿Cuáles son las dimensiones de F y G? (c) ¿Cómo es el conjunto $F \cap G$?

[P-2.45] Sea el espacio vectorial $(V, +, \cdot, \mathbb{R})$, y sean $u, v \in V, u \neq v$. Sea ahora el subconjunto $A = \{w \in V : w = \lambda u + (1 - \lambda)v, \lambda \in \mathbb{R}\}$. Estudie si A es un subespacio vectorial de V en los siguientes dos casos: (a) u y v son linealmente dependientes; y (b) u y v son linealmente independientes.

[P-2.46] Sea V el espacio de todas las funciones reales de variable real con las operaciones interna y externa convencionales. Sea ahora el subconjunto $U = \{f \in V : f'(x) = f(x), \forall x \in \mathbb{R}\}$. Conteste razonadamente: (a) ¿Es U un subespacio vectorial de V? (b) En caso afirmativo, ¿cuál es su dimensión?

[P-2.47] Sea el espacio $\mathbb{R}^3$, y sea el subespacio $A = \text{span}(u, v)$, con $u = (a - 1, a, a + 1)$ y $v = (a, a, 1)$. Conteste razonadamente: (a) ¿Para qué valores de a $\dim(A) = 1$? (b) ¿Para qué valores de a $\dim(A) = 2$?

[P-2.48] Considere el espacio vectorial $P_2(\mathbb{R})$ con las operaciones interna y externa convencionales. Sean los siguientes elementos de $P_2(\mathbb{R})$: $p_1(x) = (x-a)(x-b), p_2(x) = (x-a)(x-c), p_3(x) = (x-b)(x-c)$, con $a, b, c \in \mathbb{R}$ y distintos entre sí. Obtenga razonadamente las condiciones en las que p_1, p_2 y p_3 son linealmente independientes.

[P-2.49] Sobre $\mathbb{R}^3$ se define el subespacio $F = \text{span}((1,1,-1))$ y el conjunto $G = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : 3x - y = 0, 2x + z = 0\}$. Determine razonadamente: (a) Si G es un subespacio vectorial de $\mathbb{R}^3$; y (b) el conjunto $F \cap G$.

[P-2.50] Considere la estructura algebraica $(\mathbb{R}, \$, \#, \mathbb{R})$ compuesta por el conjunto $\mathbb{R}$, sobre el que se definen la operación interna $x\$y = xy + 1$ $(x, y \in \mathbb{R})$, y la operación externa (sobre el cuerpo $\mathbb{R}$) dada por $\alpha\#x = \alpha^2 x$ $(\alpha, x \in \mathbb{R})$. Conteste razonadamente: ¿Es esta estructura un espacio vectorial?

[P-2.51] Considere el siguiente subconjunto de $P_3(\mathbb{R})$: $A = \{p \in P_3(\mathbb{R}) : p(x+2) - 2p(x+1) + p(x) = 0\}$. Conteste razonadamente: (a) ¿Es A un subespacio vectorial de $P_3(\mathbb{R})$? (b) En caso afirmativo, calcule una base de A y determine su dimensión.

[P-2.52] Considere el conjunto $\mathbb{R}^n$, formado por todos los vectores de n componentes reales. Sea w un cierto vector de este conjunto. Se propone la estructura alegebraica $(\mathbb{R}^n, \$, \#, \mathbb{R})$, en la que las operaciones interna y externa están definidas, respectivamente, como $u\$v = u + v - w$ y $\lambda\#u = \lambda(u - w) + w$, $\forall u, v \in \mathbb{R}^n, \forall \lambda \in \mathbb{R}$. Determine razonadamente si dicha estructura es un espacio vectorial.

[P-2.53] Sea $(M_n(\mathbb{R}), +, \cdot, \mathbb{R})$ el espacio vectorial de las matrices reales cuadradas de orden n con las operaciones interna y externa convencionales. Considere el subconjunto $V = \{X \in M_n(\mathbb{R}) : AX = XA\}$, con $A \in M_n(\mathbb{R})$. Conteste razonadamente: (a) ¿Es V un subespacio vectorial de $M_n(\mathbb{R})$? (b) Si $n = 2$ y $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, ¿cuál es la dimensión de V?

[P-2.54] Considere los siguientes subespacios de $M_{2\times 3}(\mathbb{R})$:

$$W_1 = \left\{ \begin{pmatrix} a & b & c \\ 0 & a & b \end{pmatrix}, \forall a, b, c \in \mathbb{R} \right\}, \; W_2 = \left\{ \begin{pmatrix} m & n & p \\ m & n & p \end{pmatrix}, \forall m, n, p \in \mathbb{R} \right\}.$$

Se pide: (a) Estudie la suma de W_1 y W_2; (b) descomponga la matriz $\begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$ de acuerdo con la suma del apartado anterior.

[P-2.55] Considere el conjunto $V = \{(a,b) : a, b \in \mathbb{R}, b \geq 0\}$, y sea la operación interna \$ sobre V definida de la forma $v_1\$v_2 = (a_1 + a_2, b_1 b_2)$, con $v_i = (a_i, b_i) \in V$. Además, sobre V y $\mathbb{R}$ hay definida una operación externa: $\lambda\#v = (\lambda a, b^\lambda)$, con $v \in V$ y $\lambda \in \mathbb{R}$. Determine razonadamente si la estructura algebraica $(V, \$, \#, \mathbb{R})$ es un espacio vectorial.

[P-2.56] Considere el conjunto V compuesto por todos los números reales, y sea la operación interna \$ sobre V definida de la forma $x\$y = x + y + 7$, con $x, y \in V$. Además, sobre V y $\mathbb{R}$ hay definida una operación externa: $\lambda\#x = \lambda x + 7(\lambda - 1)$, con $x \in V$ y $\lambda \in \mathbb{R}$. Determine razonadamente si la estructura algebraica $(V, \$, \#, \mathbb{R})$ es un espacio vectorial.

[P-2.57] Considere la estructura algebraica $(\mathbb{R}^2, \$, \#, \mathbb{R})$, en la que $\$$ es la suma convencional en este espacio, y la operación externa se define como: $\lambda \# v = v$, $\forall \lambda \in \mathbb{R}, \forall v \in \mathbb{R}^2$. Conteste razonadamente: ¿Es esta estructura un espacio vectorial?

[P-2.58] Sea el espacio vectorial $(\mathbb{C}^2, +, \cdot, \mathbb{C})$ con las operaciones interna y externa convencionales, y sean los vectores de este espacio $u = (1+i, 2i)$ y $v = (1, 1+i)$. Conteste razonadamente: (a) ¿son u y v linealmente independientes?; (b) ¿y si u y v fueran elementos de $(\mathbb{C}^2, +, \cdot, \mathbb{R})$?; (c) ¿cuál es la dimensión del primero de los espacios?; (d) ¿y la del segundo?

[P-2.59] Considere el espacio $(\mathbb{R}^3, +, \cdot, \mathbb{R})$ con las operaciones interna y externa convencionales. Sean los subespacios: W_3, formado por todos los elementos de $\mathbb{R}^3$ con tercera componente nula y las otras dos iguales; W_1, formado por todos los elementos de $\mathbb{R}^3$ con primera componente nula y las otras dos iguales; y $W_2 = \operatorname{span}(1, 1, 1)$. Conteste razonadamente: ¿Puede obtenerse $\mathbb{R}^3$ como la suma directa de los tres subespacios anteriores?

[P-2.60] Considere la estructura algebraica $(\mathbb{R}, \$, \#, \mathbb{R})$, en la que las operaciones interna y externa están definidas, respectivamente, como $u\$v = (u^3 + v^3)^{1/3}$ y $\lambda \# v = f(\lambda)v$, con $u, v, \lambda \in \mathbb{R}$, y $f(x)$ una función de variable real. Conteste razonadamente: ¿Qué condiciones exigiría a $f(x)$ para que esta estructura fuera un espacio vectorial?

[P-2.61] Sea el espacio vectorial $\mathbb{R}^3$ con las operaciones interna y externa convencionales en este espacio. Determine razonadamente si los siguientes subconjuntos de $\mathbb{R}^3$ son subespacios vectoriales: (1) $U_1 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 = z^2\}$; (2) $U_2 = \{(r, r+2, 0), r \in \mathbb{R}\}$.

[P-2.62] Sea $S = \{(4, 5, 6), (r, 5, 1), (4, 3, 2)\}$. Obtenga razonadamente los valores de r tales que $\operatorname{span}(S) \neq \mathbb{R}^3$.

[P-2.63] Considere la estructura algebraica $(\mathbb{R}^3, \$, \#, \mathbb{R})$, en la que las operaciones interna y externa están definidas, respectivamente, como $x\$y = (x_1y_1, x_2y_2, x_3y_3)$ y $\lambda \# x = (x_1^\lambda, x_2^\lambda, x_3^\lambda)$, con $x = (x_1, x_2, x_3)$, $y = (y_1, y_2, y_3)$, $\lambda \in \mathbb{R}$. Conteste razonadamente: ¿Es esta estructura un espacio vectorial?

[P-2.64] Considere el subespacio de $\mathbb{R}^4$: $F = \operatorname{span}((1, 2, -5, 3), (2, -1, 4, 7))$. Determine razonadamente los valores de λ y μ que hacen que $(\lambda, \mu, -37, -6) \in F$.

[P-2.65] Sean los subespacios de $\mathbb{R}^4$: $E_1 = \operatorname{span}((1, 1, 1, 1), (1, -1, 1, -1))$ y $E_2 = \operatorname{span}((1, 2, 0, 1), (1, 2, 1, 2), (3, 1, 3, 1))$. Obtenga razonadamente $\dim(E_1 \cap E_2)$.

[P-2.66] Considere la estructura algebraica $(M_2(\mathbb{R}), \$, \#, \mathbb{R})$, en la que la operación interna se define como $A\$B = (AB + BA)/2$, $\forall A, B \in M_2(\mathbb{R})$; y la operación externa se define como $\lambda \# A = 0$, $\forall \lambda \in \mathbb{R}, \forall A \in M_2(\mathbb{R})$. Conteste razonadamente: ¿Es esta estructura un espacio vectorial?

[P-2.67] Sea el espacio vectorial $(M_2(\mathbb{R}), +, \cdot, \mathbb{R})$ con las operaciones interna y externa convencionales. Considere los siguientes subespacios: $U = \{\begin{pmatrix} u & -u-x \\ 0 & x \end{pmatrix}, \forall u, x \in$

$\mathbb{R}\}$ y $V = \{\begin{pmatrix} v & 0 \\ w & -v \end{pmatrix}, \forall v, w \in \mathbb{R}\}$. Determine razonadamente una base de U, una base V, una base de $U + V$, y una base de $U \cap V$.

[P-2.68] En el espacio $P_2(\mathbb{R})$ se consideran los siguientes polinomios: $p_1(x) = x^2 + 2x - 3$, $p_2(x) = 2x^2 - 3x + 4$, y $p_3(x) = ax^2 - 1$. Obtenga razonadamente el valor de a que hace al conjunto $\{p_1, p_2, p_3\}$ linealmente dependiente.

[P-2.69] Considere el espacio vectorial $(M_2(\mathbb{R}), +, \cdot, \mathbb{R})$ con las operaciones interna y externa convencionales. Sea U el subconjunto de $M_2(\mathbb{R})$ compuesto por todas las matrices tales que la suma de todos los elementos de cada una de sus filas es cero, y lo mismo para los elementos de cada una de sus columnas. Conteste razonadamente: (a) ¿Es U un subespacio vectorial de $M_2(\mathbb{R})$? (b) ¿Cuál es la dimensión de U?

[P-2.70] Determine razonadamente para qué valores de α y β los vectores $u_1 = (3 + \beta, 6, 1+\alpha)$ y $u_2 = (1-\beta, 2, 3+3\alpha)$ son base de $F = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : 2x-y-3z = 0\}$.

[P-2.71] Considere la estructura algebraica $(\mathbb{R}, \$, \#, \mathbb{R})$ compuesta por el conjunto $\mathbb{R}$, sobre el que se definen la operación interna $x\$y = x + 2y$ $(\forall x, y \in \mathbb{R})$, y la operación externa (sobre el cuerpo $\mathbb{R}$) dada por $\lambda\#x = \lambda \cdot x$ $(\forall\lambda, x \in \mathbb{R})$. Conteste razonadamente: ¿Es esta estructura un espacio vectorial?

[P-2.72] Sean los vectores de $\mathbb{R}^3$: $v_1 = (1, 1, -1)$, $v_2 = (2, 1, 0)$, y $w = (-1, 0, \alpha + 1)$. Sea ahora el conjunto $F = \{u \in \mathbb{R}^3 : u + w \in \text{span}(v_1, v_2)\}$. Conteste razonadamente: ¿cuándo es F subespacio vectorial de $\mathbb{R}^3$?

Capítulo 3

Aplicaciones lineales

Como decíamos en el Prólogo, el objeto matemático protagonista del Álgebra Lineal es la aplicación o transformación lineal. Hasta el momento, hemos centrado nuestro análisis en el estudio de los espacios vectoriales $(V, \$, \#, \mathbb{F})$. Sus elementos, los vectores v, pueden combinarse internamente ($\$$) o externamente ($\#$), en este segundo caso mediante la interacción con los elementos de un cuerpo $\mathbb{F}$, pero siempre el resultado de la operación algebraica termina siendo un vector de V.

En este capítulo vamos a definir una aplicación T que *transforma* elementos de un espacio V en elementos de otro espacio vectorial W. De forma similar a las operaciones algebraicas vistas anteriormente, impondremos a esta aplicación dos propiedades (la *aditividad* y la *homogeneidad*) que le darán un carácter *lineal*. Este carácter restringe la generalidad de la aplicación, pero constituye un versátil y simple modelo para muchos procesos de la Ingeniería que, el menos en primera instancia, puedan ser considerados lineales.

3.1. Definición de aplicación lineal

Considere dos espacios vectoriales de dimensión finita, definidos sobre el mismo cuerpo $\mathbb{F}$, pero cada uno con sus correspondientes operaciones bien definidas: $(V, \$_1, \#_1, \mathbb{F})$ y $(W, \$_2, \#_2, \mathbb{F})$. Vamos a suponer que $\dim(V) = n$ y $\dim(W) = m$. Llamamos T a la aplicación que transforma elementos de V en elementos de W: $T\colon V \to W$. Si v es un elemento genérico de V, T actúa sobre v para generar un cierto $w \in W$: $T(v) = w$. Esta aplicación T se dice *lineal* si se verifican las siguientes dos propiedades:

1. *Aditividad*: $\forall u, v \in V : T(u\$_1 v) = T(u)\$_2 T(v)$.

2. *Homogeneidad*: $\forall \alpha \in \mathbb{F}, \forall v \in V : T(\alpha \#_1 v) = \alpha \#_2 T(v)$.

Es posible reunir estas dos propiedades en una sola, que recibe el nombre de *principio de superposición*:

$$\forall \alpha, \beta \in \mathbb{F}, \forall u, v \in V : T([\alpha \#_1 u]\$_1[\beta \#_1 v]) = [\alpha \#_2 T(u)]\$_2[\beta \#_2 T(v)].$$

En lo sucesivo, para aligerar la notación, designaremos a las operaciones internas en V y W de manera genérica mediante el símbolo $+$, y las externas entre los espacios y el cuerpo $\mathbb{F}$ mediante $\cdot$, entendiendo que, en cada espacio, estos dos símbolos puedan tener significados diferentes[1].

Vamos a ilustrar las ideas anteriores mediante algunos ejemplos:

- Ejemplo 1: $T_1\colon P_2(\mathbb{R}) \to P_1(\mathbb{R}).\, T_1(p(x)) = p'(x), \forall p(x) \in P_2(\mathbb{R})$.
- Ejemplo 2: $T_2\colon P_2(\mathbb{R}) \to P_3(\mathbb{R}).\, T_2(p(x)) = \int p(x)dx, \forall p(x) \in P_2(\mathbb{R})$.
- Ejemplo 3: $T_3\colon P_2(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}.\, T_3(p(x)) = \int_0^1 p(x)dx, \forall p(x) \in P_2(\mathbb{R})$.
- Ejemplo 4: $T_4\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2.\, T_4(x,y,z) = (2x - y + 3z, 7x + 5y - 6z), \forall (x,y,z) \in \mathbb{R}^3$.

Es importante que se cerciore de que, efectivamente, las aplicaciones propuestas son lineales (cumplen las dos propiedades prescritas).

3.2. Núcleo e imagen de una aplicación lineal

Considere una aplicación lineal T entre V y W. Se llama *núcleo* de T al siguiente subconjunto de V:

$$\mathrm{Ker}(T) = \{v \in V : T(v) = 0_W\},$$

donde 0_W es el elemento neutro de W (recuerde la Propiedad 3 de la Sección 2.1). Observe que conservamos la nomenclatura anglosajona en la definición del núcleo: la palabra "kernel".

De forma similar, podemos definir un subconjunto de W de especial interés, la *imagen* de T:

$$\mathrm{Im}(T) = \{w \in W : T(v) = w, v \in V\}.$$

Es sencillo demostrar (inténtelo) que $\mathrm{Ker}(T)$ es un subespacio vectorial de V y que $\mathrm{Im}(T)$ es subespacio de W. Algo más laboriosa es la demostración de este resultado:

$$\dim(V) = \dim(\mathrm{Ker}(T)) + \dim(\mathrm{Im}(T)).$$

Es legítimo preguntárselo: ¿para qué definimos estos subespacios? Estos subespacios nos permiten, de manera muy sencilla, determinar si una aplicación lineal es inyectiva o suprayectiva[2]. En concreto, T será inyectiva sii $\mathrm{Ker}(T) = \{0_V\}$; por su parte, T será suprayectiva sii $\mathrm{Im}(T) = W$.

Como es sabido, un aplicación es biyectiva cuando es inyectiva y suprayectiva. En estas condiciones es posible garantizar que la aplicación será *invertible*, en el sentido de que será

[1] Esta simplificación suele ser común en los textos dedicados al Álgebra Lineal, si bien en pocas ocasiones se hace explícita.

[2] Se recuerda que una aplicación es *inyectiva* si a elementos distintos de V les corresponden elementos distintos en W, y que es *suprayectiva* cuando cada elemento de W resulta de la transformación de al menos un elemento de V.

posible *deshacer* la acción de T sobre los elementos de V mediante una aplicación inversa, de W en V, que designaremos mediante T^{-1}. Cuando entre dos espacios vectoriales existe una aplicación lineal invertible, lo que se denomina *isomorfismo*, dichos espacios se dicen *isomorfos*. Evidentemente, en este caso, $\dim(V) = \dim(W)$. Un ejemplo es el isomorfismo entre $\mathbb{R}^2$ y C visto en el Apéndice C.

3.3. Representación matricial de una aplicación lineal

Tal y como vimos en la Subsección 2.5.3, dada una base de un espacio V de dimensión n, $B_V = \{v_1, \ldots, v_n\}$, cualquier vector $v \in V$ puede expresarse de forma única como combinación lineal de los elementos de B_V: $v = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i v_i$. Además, vimos que estos α_i podían reunirse en un vector columna de coordenadas $\boldsymbol{\alpha}$. Otro tanto podría decirse para cualquier elemento $w \in W$. En efecto, si la dimensión de W es m, ahora la base sería $B_W = \{w_1, \ldots, w_m\}$, y el vector de coordenadas, en este caso de m componentes, lo podemos representar mediante $\boldsymbol{\beta}$.

Supongamos ahora que nuestro w del párrafo anterior es el resultado de la actuación de T sobre v: $T(v) = w$. Claramente, esta ecuación determina una relación *operacional* entre v y w a través de T. ¿Podemos esperar algún tipo de relación entre $\boldsymbol{\alpha}$ y $\boldsymbol{\beta}$, vectores de coordenadas respectivos de v y w?

Como decíamos, podemos escribir $v = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i v_i$. Por tanto, $w = T(\sum_{i=1}^{n} \alpha_i v_i)$. Puesto que T es lineal, verifica el principio de superposición, por lo que

$$w = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i T(v_i) = \sum_{j=1}^{m} \beta_j w_j. \tag{3.1}$$

Los $T(v_i)$ $(i = 1, \ldots, n)$ de la expresión anterior son elementos de W, por lo que pueden ser representados como combinación lineal de los elementos de B_W:

$$T(v_i) = \sum_{j=1}^{m} a_{ji} w_j, \tag{3.2}$$

donde los a_{ji} $(j = 1, \ldots, m)$ serían precisamente las coordenadas de $T(v_i)$ en B_W. Si reintegramos (3.2) en (3.1), obtenemos:

$$\sum_{j=1}^{m} \beta_j w_j = \sum_{j=1}^{m} \left(\sum_{i=1}^{n} \alpha_i a_{ji} \right) w_j,$$

de donde podemos concluir que

$$\beta_j = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i a_{ji}.$$

Esta expresión puede interpretarse como el producto de una matriz A de orden $m \times n$, formada por los a_{ij}, y el vector columna $\boldsymbol{\alpha}$ (véase la Subsección D.2.3). El resultado es el vector $\boldsymbol{\beta}$. Es decir, la relación buscada entre $\boldsymbol{\alpha}$ y $\boldsymbol{\beta}$ resulta ser la ecuación matricial:

$$\boldsymbol{\beta} = A\boldsymbol{\alpha}.$$

Observaciones importantes en relación con esta ecuación:

- Esta ecuación determina una descripción *matricial* (numérica) de T que, a diferencia de la descripción operacional ($w = T(v)$), que es *universal*, es relativa a las bases consideradas, B_V y B_W. Si se eligen unas nuevas bases, se genera una nueva ecuación matricial, con una matriz distinta, y unos vectores que representan las coordenadas de v y w en las nuevas bases.
- A la matriz A se le suele denominar la *representación matricial* o *motor matricial* de T en las bases B_V y B_W.
- La posibilidad de disponer de una representación numérica, apta para ser incorporada a un computador, independientemente de lo abstractos que sean los espacios V y W, resulta de gran importancia práctica.
- Si una transformación lineal es invertible, la representación matricial de T^{-1} es A^{-1}, donde A es la representación matricial de T; es decir, $\boldsymbol{\alpha} = A^{-1}\boldsymbol{\beta}$.

Finalmente, recapitulemos, en forma de algoritmo, cuál es el procedimiento para obtener A:

1. $\forall v_i \in B_V$: calculamos los $T(v_i)$.
2. $\forall i = 1, \dots, n$: expresamos $T(v_i)$ como combinación lineal de los elementos de B_W: $T(v_i) = \sum_{j=1}^{m} \gamma_j^i w_j$.
3. Si reunimos los γ_j^i $(j = 1, \dots, m)$en un vector $\boldsymbol{\gamma}^i$, este vector constituye la columna i-ésima de A.

Veamos un ejemplo sencillo en el que aplicar estas nuevas ideas. Considere la aplicación lineal del Ejemplo 4 de la Sección 3.1: $T_4 \colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2 . T_4(x, y, z) = (2x - y + 3z, 7x + 5y - 6z), \forall (x, y, z) \in \mathbb{R}^3$. Vamos a calcular la representación matricial de T_4 en las bases $B_{\mathbb{R}^3} = \{(1, 0, 0), (0, 1, 0), (0, 0, 1)\}$ y $B_{\mathbb{R}^2} = \{(1, -1), (0, 1)\}$. De acuerdo con el algoritmo anterior:

$$\begin{aligned} T(1,0,0) &= (2,7) = \gamma_1^1(1,-1) + \gamma_2^1(0,1), \\ T(0,1,0) &= (-1,5) = \gamma_1^2(1,-1) + \gamma_2^2(0,1), \\ T(0,0,1) &= (3,-6) = \gamma_1^3(1,-1) + \gamma_2^3(0,1). \end{aligned}$$

Ahora sólo nos falta resolver cada una de las tres ecuaciones vectoriales anteriores para cada uno de los vectores $\boldsymbol{\gamma}^i$ $(i = 1, 2, 3)$, que constituyen las tres columnas de la matriz A:

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 9 & 4 & -3 \end{pmatrix}.$$

3.4. Cambio de base y aplicaciones lineales

El concepto de cambio de base, dentro de un espacio vectorial, no precisa de ninguna aplicación lineal. Sin embargo, como decíamos en la Subsección 2.5.3, hemos pospuesto a este momento su tratamiento, pues creemos que el contexto de las aplicaciones lineales es idóneo (por razones que veremos más adelante) para introducir esta idea.

Sea $T\colon V \to W$. Supongamos que en V hay definida una base $B_V = \{v_1, \dots, v_n\}$ y en W una base $B_W = \{w_1, \dots, w_m\}$. Tal y como hemos visto, esto permite obtener una representación matricial de T (A), y una relación entre las coordenadas del vector v $(\boldsymbol{\alpha})$ y su transformación por T $(T(v))$: $\boldsymbol{\beta} = A\boldsymbol{\alpha}$.

Considere ahora que empleamos dos nuevas bases en la representación matricial de T, las bases $B'_V = \{v'_1, \dots, v'_n\}$ y $B'_W = \{w'_1, \dots, w'_m\}$. Llamemos B a esta nueva representación matricial, y $\boldsymbol{\alpha}'$, $\boldsymbol{\beta}'$ a las respectivas coordenadas, en las nuevas bases, de v y $T(v)$. Sabemos que habrá de verificarse $\boldsymbol{\beta}' = B\boldsymbol{\alpha}'$. Nos preguntamos ahora: ¿Es posible establecer algún tipo de relación entre las matrices A y B?

Este diagrama resume lo que hemos dicho hasta el momento:

$$\begin{array}{ccc} \boldsymbol{\alpha} & \xrightarrow{A} & \boldsymbol{\beta} \\ \downarrow & & \downarrow \\ \boldsymbol{\alpha}' & \xrightarrow{B} & \boldsymbol{\beta}' \end{array} \tag{3.3}$$

Observe que los movimientos horizontales en el diagrama se corresponden con la acción de T en un par de bases. La línea superior corresponde al par de bases B_V, B_W, mientras que la inferior al par B'_V, B'_W. Por su parte, los movimientos verticales están asociados a un cambio de base dentro de cada subespacio: el movimiento vertical izquierdo corresponde a un cambio en V (de B_V a B'_V), y el derecho a uno en W (de B_W a B'_W). Tratemos de caracterizar estos movimientos verticales. Vamos a hacerlo en V, pero sería totalmente análogo en W.

De acuerdo con el sentido de las flechas verticales en el diagrama, vamos a denominar a la base B_V nuestra base *origen* y a B'_V nuestra base *destino*. Dado un $v \in V$, podemos escribir éste en la base origen como

$$v = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i v_i, \tag{3.4}$$

y en la base destino como

$$v = \sum_{j=1}^{n} \alpha'_i v'_j. \tag{3.5}$$

Por ser los v_i elementos de V, podemos escribirlos como combinación lineal de los elementos de la base destino:

$$v_i = \sum_{j=1}^{n} p_{ji} v'_j, \tag{3.6}$$

donde los p_{ji} serían las coordenadas de v_i en la base B'_V. Si sustituimos (3.6) en (3.4), obtenemos, tras reordenar:

$$v = \sum_{j=1}^{n} \left(\sum_{i=1}^{n} p_{ji}\alpha_i \right) v'_j.$$

Si comparamos ahora esta expresión con (3.5), concluimos que

$$\alpha'_j = \sum_{i=1}^{n} p_{ji}\alpha_i.$$

Es decir: $\boldsymbol{\alpha}' = P\boldsymbol{\alpha}$, donde P, la denominada *matriz de cambio de base* $(n \times n)$, permite obtener coordenadas en la base destino, a partir de coordenadas en la base origen. Observe que las columnas de P son los escalares resultantes de expresar los elementos de la base origen en función de los elementos de la base destino.

Evidentemente, podríamos realizar este mismo análisis en el espacio W, en cuyo caso obtendríamos una matriz de cambio de base Q $(m \times m)$.

Podemos incorporar esta información al diagrama (3.3), y obtener:

$$\begin{tikzcd} \boldsymbol{\alpha} \arrow[r, "A"] \arrow[d, "P"] & \boldsymbol{\beta} \arrow[d, "Q"] \\ \boldsymbol{\alpha}' \arrow[r, "B"] & \boldsymbol{\beta}' \end{tikzcd} \tag{3.7}$$

A partir de este diagrama, podemos establecer las siguientes relaciones para los movimientos horizontales:

$$\boldsymbol{\beta} = A\boldsymbol{\alpha}, \quad \boldsymbol{\beta}' = B\boldsymbol{\alpha}';$$

y las siguientes para los verticales:

$$\boldsymbol{\alpha}' = P\boldsymbol{\alpha}, \quad \boldsymbol{\beta}' = Q\boldsymbol{\beta}'.$$

De su combinación resulta la relación buscada entre A y B:

$$B = QAP^{-1}.$$

Vamos a ilustrar estas ideas con un ejemplo sencillo. Considere la siguiente aplicación lineal entre $\mathbb{R}^3$ y $\mathbb{R}^2$: $T(x, y, z) = (x + y - z, 2x + 6y)$. En origen, las bases son las llamadas canónicas en ambos subespacios: $B_{\mathbb{R}^3} = \{(1, 0, 0), (0, 1, 0), (0, 0, 1)\}$ y $B_{\mathbb{R}^2} = \{(1, 0), (0, 1)\}$. En destino usaremos las bases $B_{\mathbb{R}^3} = \{(1, 0, 1), (0, 0, 1), (-1, -1, 1)\}$ y $B_{\mathbb{R}^2} = \{(1, -1), (1, 1)\}$.

El cálculo de A es sencillo, tratándose de las bases canónicas:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 2 & 6 & 0 \end{pmatrix}.$$

La matriz B puede obtenerse calculando las imágenes de los elementos de la base destino en $\mathbb{R}^3$, y expresando éstas como combinaciones lineales de los elementos de la base destino en $\mathbb{R}^2$. El resultado es:

$$B = \begin{pmatrix} -1 & -1/2 & 5/2 \\ 1 & -1/2 & -11/2 \end{pmatrix}.$$

En cuanto a las matrices de cambio de base, P se obtiene expresando los elementos de la base origen de $\mathbb{R}^3$ como combinación lineal de los elementos de la base destino de este espacio. Esto proporciona, secuencialmente, las columnas de P, con lo que

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Algo totalmente análogo puede hacerse en W para obtener Q:

$$Q = \begin{pmatrix} 1/2 & -1/2 \\ 1/2 & 1/2 \end{pmatrix}.$$

Es sencillo comprobar que $B = QAP^{-1}$.

3.5. Ejercicios propuestos

[E-3.1] Estudiar si las siguientes transformaciones son lineales:

1. $f : \mathbb{R}^2 \longmapsto \mathbb{R}, \quad (x_1, x_2) \longmapsto x_1^2 + x_2^2$.
2. $f : P_2(\mathbb{R}) \longmapsto P_2(\mathbb{R}), \quad p(t) \longmapsto t^2 p''(t) + tp'(t) + p(t)$.
3. $f : \mathbb{R}^2 \longmapsto \mathbb{R}^2, \quad (x_1, x_2) \longmapsto (4x_1 - 2x_2, 3|x_2|)$.

[E-3.2] Demuestre los siguientes enunciados:

1. Si f y g son transformaciones lineales de V en W, entonces la transformación h, también de V en W, definida como $h(v) = f(v) + g(v), \quad \forall v \in V$, es una aplicación lineal.
2. Si f es una transformación lineal de V en W y λ es una escalar arbitrario, la transformación $g(v) = \lambda f(v)$ es también una aplicación lineal.
3. Si f es una transformación lineal de V en W, y g es otra transformación lineal de W en X, la transformación de V en X dada por $g \circ f$ es también lineal.

[E-3.3] En el supuesto del último apartado de ejercicio anterior, y dadas las bases $B_V = \{v_1, \ldots, v_n\}$, $B_W = \{w_1, \ldots, w_m\}$, y $B_X = \{x_1, \ldots, x_k\}$, obtenga la representación matricial de $g \circ f$.

[E-3.4] Sea el endomorfismo $f : P_2(\mathbb{R}) \longmapsto P_2(\mathbb{R})$ dado por $f(1) = 1$, $f(t-1) = t+1$, $f((t-1)^2) = (t+1)^2$.

1. Calcular su imagen y su dimensión. ¿Es f suprayectiva?
2. Hallar la matriz de f respecto a la base $\{t^2, t, 1\}$.
3. Determinar los polinomios de $P_2(\mathbb{R})$ tales que su imagen por f sea el polinomio t^2.

[E-3.5] Sea la transformación lineal $g : P_2(\mathbb{R}) \longmapsto P_2(\mathbb{R})$ dada por $g(t+1) = 1$, $g(t^2+t) = t+1$, $\operatorname{Ker} g = \operatorname{span}(t^2 - t - 1)$.

1. Calcular la imagen de g y su dimensión.
2. Hallar la matriz de g respecto de la base $\{t^2, t, 1\}$.
3. Hallar $g(B)$, donde $B = \operatorname{span}(t^2 + 1, 3t - 2)$.

[E-3.6] Sea una transformación lineal $f : \mathbb{R}^4 \longmapsto \mathbb{R}^3$ que, en las bases canónicas de los espacios implicados, posee la siguiente representación matricial:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & -3 \\ 2 & 3 & -1 & 2 \\ 2 & 1 & -6 & 1 \end{pmatrix}.$$

1. ¿Es f inyectiva?
2. ¿Es f suprayectiva?
3. Obtenga la representación matricial de f en las siguientes nuevas bases: $\{(1, 0, 0, 1), (-1, 0, 0, 1), (0, 1, 1, 0), (0, -1, 1, 0)\}$, para $\mathbb{R}^4$, y $\{(1, 0, 1), (0, 1, 0), (0, 0, -1)\}$, para $\mathbb{R}^3$.

[E-3.7] Determine razonadamente si el operador f de $\mathbb{R}^3$, tal que $f(x_1, x_2, x_3) = (x_3, x_1 + x_2, -x_3)$, es lineal. En caso afirmativo, calcule su núcleo e imagen.

[E-3.8] Sea la transformación lineal f, de $\mathbb{R}^3$ en $\mathbb{R}^2$, de la que se sabe que $f(1, 0, 1) = (0, 1)$, $f(0, 1, 1) = (0, 2)$ y $f(1, 1, 0) = (1, 1)$.

1. Calcule la representación matricial de f en las bases canónicas de los espacios implicados.
2. Determine cómo transforma f al subespacio $S = \{(x_1, x_2, x_3) : x_1 + x_2 - x_3 = 0\}$.

[E-3.9] Determine si los siguientes operadores son lineales:

1. T_1 definido sobre $\mathbb{R}^2$ de la forma: $T_1((x, y)) = (y, x), \forall (x, y) \in \mathbb{R}^2$.
2. T_2 definido sobre el espacio de todos los polinomios reales, $P(\mathbb{R})$, de la forma: $T_2(p(x)) = \int_2^x p(t)dt, \forall p(x) \in P(\mathbb{R})$.

[E-3.10] Sea el espacio vectorial $(V, +, \cdot, \mathbb{C})$ de todas las matrices cuadradas de orden 2 con coeficientes complejos. Sea la transformación de V en $\mathbb{C}$ dada por $T(\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}) = a + d$.

1. ¿Es T lineal?
2. Halle una base de $\mathrm{Ker}(T)$.

[E-3.11] Sea la matriz

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 \\ -1 & -1 & 2 \end{pmatrix},$$

y las bases $B_1 = \{(2,1,0), (-1,0,1), (0,1,1)\}$ de $\mathbb{R}^3$ y $B_2 = \{(1,-2), (0,3)\}$ de $\mathbb{R}^2$. Determine:

1. El núcleo y la imagen de la aplicación lineal f_1 representada por A al considerar en los espacios origen y destino las bases canónicas respectivas.
2. La aplicación lineal f_2 representada por A si en $\mathbb{R}^3$ se considera la base B_1 y en $\mathbb{R}^2$ la base B_2.

3.6. Problemas propuestos

[P-3.1] Sea T la transformación entre $\mathbb{R}^2$ y $M_2(\mathbb{R})$ definida por $(x,y) \mapsto \begin{pmatrix} x & x+y \\ 0 & y \end{pmatrix}$.

Conteste razonadamente:

1. ¿Es T lineal?
2. ¿Es T inyectiva?

[P-3.2] Sea T una aplicación, definida entre $\mathbb{R}^2$ y $\mathbb{R}^2$, de la forma: $(x,y) \mapsto (y+a, x)$. Estudie para qué valores de a T es sobreyectiva.

[P-3.3] De un operador T sobre $P_2(\mathbb{R})$ se sabe que $T(x^2) = x + k$, $T(x) = (k-1)x$, y $T(1) = x^2 + k$ ($k \in \mathbb{R}$). Obtenga razonadamente:

1. Una representación matricial de T.
2. El núcleo de T en función de los posibles valores de k.
3. La imagen de T en función de los posibles valores de k.

[P-3.4] Sea T un operador sobre $\mathbb{R}^3$ del que se sabe que $T(1,0,1) = (2,3,-1)$, $T(1,-1,1) = (3,0,-2)$, y $T(-2,7,-1) = (2,3,-1)$. Obtenga razonadamente:

1. Una representación matricial de T.
2. Una expresión para $T(x,y,z), \quad \forall (x,y,z) \in \mathbb{R}^3$.

[P-3.5] Sea el siguiente operador sobre $P_3(\mathbb{R})$:

$$T(p(x)) = xp'(x) - p(x), \quad \forall p(x) \in P_3(\mathbb{R}).$$

1. Demuestre que T es lineal.
2. Calcule $\mathrm{Ker}(T)$ e $\mathrm{Im}(T)$.
3. ¿Es cierto que $\mathrm{Ker}(T) \oplus \mathrm{Im}(T) = P_3(\mathbb{R})$? Razone su respuesta.

[P-3.6] Sean S y T dos operadores sobre $\mathbb{R}^2$. Se sabe que la representación matricial de S en la base $B_1 = \{(1,2),(2,1)\}$ es $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$, y la de T en la base $B_2 = \{(1,1),(1,2)\}$ es $\begin{pmatrix} 3 & 3 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$.

Sea $u = (3,3) \in \mathbb{R}^2$. Calcule razonadamente:

1. La representación matricial de $S+T$ en la base B_2.
2. La representación matricial de $S \circ T$ en la base B_1.
3. Las coordenadas de $S(u)$ en la base B_1.
4. Las coordenadas de $T(u)$ en la base B_2.

[P-3.7] Sea el operador T definido sobre $M_2(\mathbb{R})$. T transforma la matriz $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ en $\begin{pmatrix} a-d & 0 \\ 0 & b-c \end{pmatrix}$. Calcule el núcleo de T y su dimensión.

[P-3.8] Sea la transformación que convierte un vector de $\mathbb{R}^2$, (x_1, x_2), en la matriz $\begin{pmatrix} x_1 & x_1+x_2 \\ 0 & x_2 \end{pmatrix}$. ¿Es dicha transformación lineal? ¿Es inyectiva? Razone sus respuestas.

[P-3.9] Sea un operador T definido sobre $P_2(\mathbb{R})$. Se sabe que $x^2 \in \mathrm{Ker}(T)$, $T(1+x) = x$, y $T(2) = x^2$. ¿Cuál es el núcleo de este operador?

[P-3.10] Sea la transformación lineal entre $\mathbb{R}^3$ y $\mathbb{R}^2$ que asigna al vector genérico (x,y,z) el vector $(x-y, y-z)$. Se pide:

1. Calcule la representación matricial de esta transformación lineal en las bases $\{(1,1,1),(1,1,0),(0,1,1)\}$ y $\{(1,2),(1,1)\}$.
2. Empleando la matriz del apartado anterior y las oportunas matrices de cambio de base, calcule la representación matricial de esta transformación lineal en las bases canónicas de los espacios implicados.

[P-3.11] Sea T un operador definido sobre $\mathbb{R}^3$. En la base canónica dicho operador posee la siguiente representación matricial:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Calcule una base de $\mathbb{R}^3$ en la que la representación matricial de T sea $B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$. ¿Es dicha base única? Razone su respuesta.

[P-3.12] Sea $(V, +, \cdot, \mathbb{R})$ el espacio vectorial de las funciones reales de variable real con las operaciones suma de funciones $(+)$ y producto de escalar por función $(\cdot)$ convencionales. Sea ahora la transformación T entre $\mathbb{R}^3$ y V que asigna a cada $(a, b, c) \in \mathbb{R}^3$ la función $a\mathrm{sen}^2 t + b\cos^2 t + c$. Conteste razonadamente:

1. ¿Es T lineal?
2. ¿Es T inyectiva?
3. ¿Es T sobreyectiva?

[P-3.13] Sea V el espacio vectorial de todas las funciones reales definidas en el intervalo $[0, 1]$ con derivadas continuas en cada punto, y sea W el espacio vectorial de todas las funciones reales definidas en el intervalo $[0, 1]$. Sea T la aplicación entre elementos de V y W definida como:

$$T(f(x)) = \int_0^x f(t)dt + f'(x), \quad \forall x \in [0, 1].$$

Conteste razonadamente:

1. ¿Es T lineal?
2. ¿Pertenecen $f = \mathrm{sen} x$ y $g = \cos x$ al $\mathrm{Ker}(T)$?

[P-3.14] Determine razonadamente si la aplicación entre $\mathbb{R}^3$ y $P_2(\mathbb{R})$ tal que $(a, b, c) \mapsto (a - 1)x^2 + (b - 1)x + c - 1$ es o no lineal.

[P-3.15] Sea el espacio $(M_5(\mathbb{C}), +, \cdot, \mathbb{C})$ con las operaciones suma y producto convencionales. Sean A, B, C, D cuatro matrices de este espacio. Sea ahora T la transformación, definida sobre el espacio anterior de la forma $T(X) = AXB + CX + XD, \forall X \in M_5(\mathbb{C})$. Determine razonadamente si T es lineal.

[P-3.16] De un operador T definido sobre $\mathbb{R}^3$ se sabe que $T(1, 0, 1) = (2, 3, -1)$, $T(1, -1, 1) = (3, 0, -2)$, y $T(-2, 7, -1) = (2, 3, -1)$.

1. Calcule $\mathrm{Im}(T)$.
2. Obtenga una representación matricial de T.

[P-3.17] Determine razonadamente si las siguientes transformaciones son o no lineales:

1. $T_1 : P_5(\mathbb{R}) \mapsto P_{10}(\mathbb{R}) : T(p(x)) = p(x^2), \forall p(x) \in P_5(\mathbb{R})$.
2. $T_2 : P_3(\mathbb{R}) \mapsto \mathbb{R}^4 : T(p) = (p(-2), p(3), p(1), p(0)), \forall p \in P_3(\mathbb{R})$.

[P-3.18] Sea T una transformación definida sobre $\mathbb{R}^2$ de la forma $T((x, y)) = (2x+y, 2x+y)$. Conteste razonadamente: ¿Es T invertible?

[P-3.19] Sobre $M_2(\mathbb{R})$ hay definida una transformación T de la forma $T(A) = A + A^t, \forall A \in M_2(\mathbb{R})$.

1. Determine razonadamente si T es lineal.
2. Sea $B \in M_2(\mathbb{R}) : B = B^t$. Obtenga una $A \in M_2(\mathbb{R}) : T(A) = B$.
3. Obtenga razonadamente $\mathrm{Ker}(T)$.
4. Obtenga razonadamente $\mathrm{Im}(T)$.

[P-3.20] Sea T una aplicación entre $P_2(\mathbb{R})$ y $P_3(\mathbb{R})$ definida de la forma: $p(x) \mapsto xp(x) + \dfrac{p(x) - p(0)}{x}$, $\forall p(x) \in P_2(\mathbb{R})$. Determine razonadamente si T es lineal.

[P-3.21] Sea el espacio vectorial $(\mathbb{R}^2, +, \cdot, \mathbb{R})$ con las operaciones interna y externa convencionales. Sea T_1 el operador que rota un ángulo θ (en sentido contario a las agujas del reloj) los vectores de $\mathbb{R}^2$, y sea T_2 el operador que refleja con respecto al eje X los vectores de $\mathbb{R}^2$. Obtenga razonadamente la representación matricial del operador $T_1 \circ T_2$ en la base canónica.

[P-3.22] Sea el espacio vectorial $(M_2(\mathbb{C}), +, \cdot, \mathbb{C})$, y la transformación T definida como $T(A) = \bar{A}, \forall A \in M_2(\mathbb{C})$. Conteste razonadamente: ¿Es T lineal?

[P-3.23] Sea el operador T definido sobre $\mathbb{R}^3$ como $T(a, b, c) = (a - b + c, 2a + b - c, -a - 2b + 2c), \forall (a, b, c) \in \mathbb{R}^3$. Obtenga razonadamente una base de $\mathrm{Ker}(T)$ y otra de $\mathrm{Im}(T)$.

[P-3.24] Sea el espacio vectorial $(M_2(\mathbb{R}), +, \cdot, \mathbb{R})$, y el operador T definido como $T(A) = A - A^t, \forall A \in M_2(\mathbb{R})$. Obtenga razonadamente la representación matricial de T en la base canónica de $M_2(\mathbb{R})$.

[P-3.25] Se define una transformación entre $P_3(\mathbb{R})$ y $M_2(\mathbb{R})$ de la forma: $T(p(x)) = \begin{pmatrix} p(1) & p'(1) \\ p''(1) & p'''(1) \end{pmatrix}, \forall p(x) \in P_3(\mathbb{R})$. Conteste razonadamente: ¿Es T lineal?

[P-3.26] Sea el operador T definido sobre $P_2(\mathbb{R})$ de la forma $T(ax^2 + bx + c) = 2(a - c)x^2 + (c - a)x + b + 2c$. Conteste razonadamente: ¿Es T biyectivo?

[P-3.27] Sea el espacio $(M_2(\mathbb{R}), +\cdot, \mathbb{R})$ con las operaciones suma y producto por un escalar convencionales en este espacio. Se define sobre $M_2(\mathbb{R})$ el operador T de la siguiente forma: $T(A) = QA, \forall A \in M_2(\mathbb{R})$, y $Q = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$. Conteste razonadamente: ¿Es T lineal?

[P-3.28] Sea el operador T definido sobre $P_2(\mathbb{R})$ de la forma $T(p(x)) = p(x - 1), \forall x \in \mathbb{R}$.
(a) Obtenga razonadamente la representación matricial de T en la base $\{1+x, x, x^2\}$.
(b) ¿Es T biyectivo? Justifique su respuesta.

[P-3.29] Considere las siguientes bases de $P_4(\mathbb{R})$: $B_1 = \{x, x^2+1, 2x^4+x^3, x^3-x^2+x, x^2+x\}$ y $B_2 = \{2x^4 + 1, x^3 - 1, x^3 + 2x, x^2, x^3 - x^2\}$. Se pide: (a) Obtenga la matriz de cambio de base de B_1 a B_2. (b) Obtenga las coordenadas de $x^4 + x^3 + x^2 + x + 1$ en B_2.

[P-3.30] Sea la aplicación T entre los espacios $P_2(\mathbb{R})$ y $P_3(\mathbb{R})$ definida como $T(p(x)) = \exp(x^2)\dfrac{d}{dx}[\exp(-x^2)p(x)]$. Se pide: ($a$) Demuestre que T es lineal. (b) Obtenga $\mathrm{Ker}(T)$. (c) Obtenga una base de $\mathrm{Im}(T)$. (d) Obtenga la representación matricial de T en las bases canónicas de los espacios involucrados.

[P-3.31] Sea T la transformación lineal entre los espacios $\mathbb{R}^2$ y $\mathbb{R}^4$ tal que, en las bases canónicas, posee la representación matricial $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$. Sea el subespacio $W = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x - y = 0\}$. Obtenga el subespacio resultado de aplicar T a los elementos de W.

[P-3.32] Sea T un operador definido sobre un cierto espacio vectorial $(V, +, \cdot, \mathbb{F})$. Se denomina invariante de T, y se designa mediante $\mathrm{Inv}(T)$, al conjunto de todos los vectores de V que son transformados por T en sí mismos; es decir: $\mathrm{Inv}(T) = \{v \in V : T(v) = v\}$. ¿Es este conjunto un subespacio vectorial de V? Justifique su respuesta.

[P-3.33] Sea el operador T definido sobre $\mathbb{R}^3$ de la forma $T(x, y, z) = (\alpha x + y + z, x + \alpha y + z, x + y + \alpha z)$. ¿Para qué valores de α $\dim(\mathrm{Ker}(T)) = 1$?

[P-3.34] Sea T una transformación lineal entre los espacios V y W. En estos espacios se definen las bases: $B_V = \{v_1, v_2, v_3, v_4\}$ y $B_W = \{w_1, w_2, w_3\}$. Se sabe que $T(v_1) = w_1 - w_3$, $T(v_2) = w_2 + w_3$, $T(v_3) = w_3$, y $T(v_4) = 0$. (a) ¿Es T inyectiva? (b) ¿Es T suprayectiva?

[P-3.35] Sea T un operador sobre $\mathbb{R}^3$ tal que, en la base canónica, su representación matricial es $\begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ -1 & 3 & -7 \\ 0 & 1 & -2 \end{pmatrix}$. Sea $u = (\alpha + 3, 5, 1)$. ¿Qué valores debe tomar α para que $u \in \mathrm{Im}(T)$?

[P-3.36] Conteste razonadamente: ¿Existe alguna aplicación lineal entre $\mathbb{R}^3$ y $\mathbb{R}^2$ tal que $f((1, 0, 0)) = (1, 1)$, $f((1, 1, 0)) = (1, 0)$, $f((1, 1, 1)) = (1, -1)$ y $f((-1, 0, 1)) = (-1, -2)$?

[P-3.37] Sobre los espacios $P_2(\mathbb{R})$ y $\mathbb{R}^4$ hay definida la siguiente transformación lineal: $T(p(x)) = (p(0), p(1), p(2), p(3))$. (a) ¿Es T lineal? (b) Obtenga una representación matricial de T. (c) Obtenga $\mathrm{Ker}(T)$. (d) Obtenga $\mathrm{Im}(T)$.

[P-3.38] Considere el espacio vectorial de dimensión 2 dado por $(V, +, \cdot, \mathbb{R})$. Sea el conjunto $\{v_1, v_2\}$ una base de V. Sobre V se definen dos operadores f y g, tales que $f(v_1) = 2v_1 - v_2$, $f(v_2) = v_1 + v_2$, $g(v_1) = v_1$, y $g(v_2) = -v_1$. Conteste razonadamente: ¿$f \circ g = g \circ f$?

[P-3.39] Sea la transformación T que a cada $A \in M_2(\mathbb{R})$ le asigna el par de $\mathbb{R}^2$ $(\mathrm{tr}(A), a_{11})$, en donde suponemos que $A = [a_{ij}], \forall i, j = 1, 2$, y 'tr' designa la traza de una matriz. Conteste razonadamente: (a) ¿Es T lineal? (b) Calcule $\mathrm{Ker}(T)$ e Im(T). (c) Calcule la representación matricial de T en las bases canónicas de los espacios involucrados.

[P-3.40] Considere la siguiente transformación entre los espacios vectoriales $\mathbb{R}^3$ y $M_2(\mathbb{R})$: $T(x,y,z) = \begin{pmatrix} x & y+x \\ z & z+x \end{pmatrix}$. Determine razonadamente: (a) Si T es lineal; (b) el $\mathrm{Ker}(T)$ y la $\mathrm{Im}(T)$; y (c) la representación matricial de T en la base $\{(1,0,1),(-1,1,0),(0,-1,-3)\}$, de $\mathbb{R}^3$, y en la canónica de $M_2(\mathbb{R})$.

[P-3.41] Considere la transformación sobre los elementos $p(t) \in P_5(\mathbb{R})$ tal que $T(p(t)) = [p(t+h)-p(t)]/h$ $(h \neq 0)$. Conteste razonadamente: (a) ¿Es T lineal? (b) En caso afirmativo, calcule sendas bases de $\mathrm{Ker}(T)$ e $\mathrm{Im}(T)$.

[P-3.42] Considere la transformación T que asigna a cada matriz de $M_2(\mathbb{R})$ su traza. Determine razonadamente: (a) Si T es lineal; (b) una base de $\mathrm{Ker}(T)$; (c) si T es invertible.

[P-3.43] Considere el operador T definido sobre $P_2(\mathbb{R})$ de tal manera que en la base $\{t^2,t,1\}$ posee la representación matricial $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$. Obtenga razonadamente la representación matricial de T en la base $\{3t^2+2t, 5t^2+3t+1, 7t^2+5t+3\}$.

[P-3.44] Sobre el espacio $P_3(\mathbb{R})$ hay definidas tres transformaciones: $T_1(p(t)) = p(t+1) - q(t)$, $T_2(p(t)) = p(t^2)$, y $T_3(p(t)) = tp(t)$, en donde $p(t)$ es un elemento arbitrario de $P_3(\mathbb{R})$, y $q(t)$ es un cierto polinomio no nulo de este mismo espacio. Conteste razonadamente: (a) ¿Qué transformaciones son lineales?; (b) de éstas, ¿cuáles serían inyectivas?

[P-3.45] Sea la transformación entre $P_1(\mathbb{R})$ y $P_2(\mathbb{R})$ dada por $T(ax+b) = ax^2/2 + bx$. Conteste razonadamente: (a) ¿Es T lineal? (b) ¿Es T invertible?

[P-3.46] Considere el operador sobre $\mathbb{C}^2$ definido como $T(z_1,z_2) = (iz_1, (1+i)z_2 - z_1)$. Obtenga razonadamente: (a) la representación matricial de T en la base $\{(i,0),(0,1)\}$; (b) la representación matricial de T si se emplea una base compuesta por los elementos de la base anterior conjugados; y (c) la matriz de cambio de base entre la base original y la modificada.

[P-3.47] Sea el espacio vectorial $(M_2(\mathbb{C}),+,\cdot,\mathbb{C})$ con las operaciones interna y externa convencionales. Se define una transformación entre $M_2(\mathbb{C})$ y el espacio $M_2(\mathbb{C}) \times M_2(\mathbb{C})$ de la forma: $T(A) = (A_1, A_2)$, con $A_1 = (A+A^*)/2$ y $A_2 = (A-A^*)/2$. Conteste razonadamente: ¿Es T lineal?

[P-3.48] Considere los espacios vectoriales $(V,+,\cdot,\mathbb{R})$ y $(W,+,\cdot,\mathbb{R})$, y sea T una transformación lineal entre V y W. Se sabe que, en las bases $B_V = \{v_1,v_2\}$, $B_W = \{w_1,w_2,w_3\}$, T posee la representación matricial $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$.

Obtenga razonadamente:

1. $\mathrm{Ker}(T)$ e $\mathrm{Im}(T)$.

2. La representación matricial de T en las bases $B'_V = \{v'_1, v'_2\}$ y $B'_W = \{w'_1, w'_2, w'_3\}$, de las que lo único que se sabe es que $v_1 = v'_1 + v'_2$, $v_2 = 2v'_2$, $w_1 = w'_1 + w'_2$, $w_2 = 2w'_2 + w'_3$, $w_3 = w'_1/2$.

[P-3.49] Sea T una aplicación lineal entre los espacios V y W. Considere la lista de vectores de V linealmente dependiente $\{v_1, \cdots, v_p\}$. Conteste razonadamente: ¿Es la lista de vectores de W $\{T(v_1), \cdots, T(v_p)\}$ linealmente dependiente?

[P-3.50] Considere una aplicación lineal T, entre $\mathbb{R}^3$ y $\mathbb{R}^4$, que, en las bases canónicas de estos espacios, posee la representación matricial:

$$\begin{pmatrix} 0 & \lambda & 0 \\ 2 & \lambda & 0 \\ 0 & 2 & -\lambda \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Determine razonadamente, en cada caso, los valores de λ que: (1) hacen T inyectiva; (2) hacen T suprayectiva; (3) hacen que $(1, 2, 2, 1) \in \mathrm{Im}(T)$.

[P-3.51] Considere una transformación lineal T entre $\mathbb{R}^3$ y $\mathbb{R}^2$ de la que se sabe que $T(2, -1, 1) = (1, -1)$, $T(1, 1, 0) = (4, 1)$, y $T(1, -2, 3) = (3, 1)$. Conteste razonadamente: (1) ¿Podría calcular, con la información facilitada, $T(6, -1, 0)$?; (2) ¿es T inyectiva?; (3) ¿es T suprayectiva?; (4) ¿cuál es la representación matricial de T en las bases canónicas de los espacios implicados?

[P-3.52] Considere las transformaciones T y S definidas sobre $\mathbb{R}^2$ como $T(x, y) = (2x + y, 0)$ y $S(x, y) = (x + y, xy)$. Conteste razonadamente: ¿Son T, S, y $S \circ T$ lineales?

[P-3.53] De un operador T definido sobre $\mathbb{R}^2$ se sabe que $T(1, 1) = (0, -1)$, y que $T(-1, 2) = (3, 1)$. Determine razonadamente si T es invertible. En caso afirmativo, calcule $T^{-1}(-1, 0)$.

[P-3.54] Considere la transformación lineal T entre $\mathbb{R}^3$ y $\mathbb{R}^4$ de la que se sabe que $T(u_i) = v_i$, con $u_1 = (1, 1, 0)$, $u_2 = (0, -1, 1)$, $u_3 = (1, 0, -1)$, $v_1 = (1, -1, 0, 0)$, $v_2 = (0, 1, 2, -1)$, y $v_3 = (-1, -1, -4, 2)$. Conteste razonadamente: (a) ¿Es T inyectiva? (b) ¿Y sobreyectiva?

[P-3.55] Considere las transformaciones lineales T_1 y T_2, ambas entre los espacios $P_3(\mathbb{R})$ y $M_2(\mathbb{R})$, dadas respectivamente por $T_1(p) = \begin{pmatrix} p(0) & p(1) \\ p'(0) & p'(1) \end{pmatrix}$ y $T_2(p) = \begin{pmatrix} p(2) & p'(2) \\ p'(2) & p(2) \end{pmatrix}$, $\forall p \in P_3(\mathbb{R})$. Obtenga razonadamente, y siempre que sea posible, la representación matricial de $T_2 \circ T_1^{-1}$ en las bases canónicas de los espacios considerados.

[P-3.56] Considere el operador T definido sobre $\mathbb{R}^2$ de la forma: $T(x, y) = (-7x - 15y, 6x + 12y)$. Conteste razonadamente: ¿En qué base su representación matricial es $\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$?

[P-3.57] Considere el operador T, definido sobre $\mathbb{R}^3$, del que se sabe que $\mathrm{Ker}(T) = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : 2x + y + z = 0\}$. Sean ahora los vectores $u = (1, -1, 2)$ y $v = (-2, 2, \alpha)$. Obtenga razonadamente los valores de α tales que $T(u) = T(v)$.

Capítulo 4

Autovalores y autovectores

En los capítulos anteriores hemos tratado los fundamentos del Álgebra Lineal. Estamos ahora en disposición, como decíamos en el Prólogo, de usarlos *creativamente*.

Quizás el resultado de mayor importancia práctica del capítulo anterior sea el hecho de que cualquier aplicación lineal, por muy abstractos que sean los espacios involucrados en ella, puede reducirse a un modelo matricial que transforma coordenadas numéricas de vectores. Sólo es preciso definir, en ambos espacios, bases. Evidentemente, la complejidad de esta representación matricial va a depender de las bases que se elijan. Desde un punto de vista computacional, nos interesa disponer de un *motor matricial* lo más sencillo posible, pues esto facilitaría la generación de vectores de coordenadas *transformados* ($\boldsymbol{\beta}$) a partir de los vectores de coordenadas de entrada ($\boldsymbol{\alpha}$) mediante la regla $\boldsymbol{\beta} = A\boldsymbol{\alpha}$.

En este capítulo vamos a investigar bajo qué condiciones, y de qué manera, obtener bases que den lugar a representaciones matriciales sencillas (idealmente, diagonales). Por simplicidad, nos ceñiremos[1] al caso de aplicaciones lineales del tipo $T\colon V \to V$. Estas aplicaciones se denominan endomorfismos (aplicaciones lineales de un espacio V en sí mismo) u operadores. Nosotros emplearemos esta última denominación.

Una advertencia, antes de seguir: Conviene no perder de vista el objetivo mencionado en el párrafo anterior, pues, previamente a la obtención de los resultados formales que nos permitirán determinar si un operador admite o no una representación diagonal, tendremos que introducir un conjunto de resultados que, inicialmente, no parecerán relacionados con nuestro objetivo.

4.1. Autovalores y autovectores de un operador

Considere un operador T definido sobre el espacio V de dimensión finita n. En este espacio hay definida una base $B_V = \{v_1, \ldots, v_n\}$. Supongamos que en esta base la representación matricial de T, que será una matriz cuadrada de orden n, es diagonal: $A = \mathrm{diag}(a_1, \ldots, a_n)$, para unos ciertos $a_i \in \mathbb{F}$. Evidentemente (recuerde el mecanismo de obtención de A visto en la Sección 3.3), esto sólo es posible si $T(v_i) = a_i v_i, \forall i = 1, \ldots, n$. Estas n ecuaciones responden a una estructura del tipo

[1] Si bien al final del Capítulo 5 retomaremos el caso general de $T\colon V \to W$, con $\dim(V) \neq \dim(W)$.

$$T(v) = \lambda v, \tag{4.1}$$

donde $v \in V$ se denomina *autovector* de T, y $\lambda \in \mathbb{F}$ recibe el nombre de *autovalor* asociado al autovector v. La ecuación (4.1) determina el *problema de autovalores y autovectores de un operador.*

Antes de proseguir, hagamos tres observaciones:

1. Sólo es posible obtener una representación matricial de T diagonal en una base compuesta por autovectores de T.

2. El conjunto de todos los autovalores de T constituyen un subconjunto de $\mathbb{F}$ que se denomina *espectro* de T. Suele expresarse de la forma $\mathrm{Sp}(T)$.

3. Los autovectores de un operador T son unos vectores de V peculiares: son *insensibles* a la acción de T, salvo por la inclusión de un factor escalar multiplicativo (su autovalor)[2]. El prefijo *auto* hace precisamente referencia a esta peculiaridad.

La idea presente en esta última observación puede ser generalizada, lo que nos permite detectar en V *subespacios invariantes* a la acción de un operador T. En efecto, considere un subespacio $U \subseteq V$. U se dice *invariante* frente a la acción de T si $T(U) \subseteq U$. Es decir, si $\forall u \in U, T(u) \in U$. Ejemplos de subsespacios invariantes de un operador son siempre su núcleo e imagen.

Este concepto nos permite identificar, para cada autovalor de T, un subespacio invariante característico, que suele denominarse *autosubespacio* del operador T asociado a su autovalor λ:

$$V(\lambda) = \{v \in V : T(v) = \lambda v, \lambda \in \mathrm{Sp}(T)\}.$$

Observe que es posible interpretar los autosubespacios de un operador T como los $\mathrm{Ker}(T - \lambda I)$, donde mediante I denotamos al operador identidad.

A la vista de todo lo anterior, podemos recapitular esta sección así: el problema de autovalores y autovectores de un operador T está resuelto si conocemos $\mathrm{Sp}(T)$ y los autosubespacios $V(\lambda), \forall \lambda \in \mathrm{Sp}(T)$. Dedicamos la siguiente sección a resolver este problema.

4.2. Resolución del problema de autovalores y autovectores

En la sección anterior hemos estudiado el problema de autovalores y autovectores de un operador T. Este problema, en su máxima generalidad, responde a la ecuación (4.1). Consideremos ahora una base arbitraria de V, $B_V = \{v_1, \ldots, v_n\}$. Empleando esta base podemos calcular la representación matricial de T, A, y expresar (4.1) en forma matricial:

$$A\boldsymbol{\alpha} = \lambda\boldsymbol{\alpha}, \tag{4.2}$$

[2]Quizás resulte ilustrativa la visualización de este hecho en un espacio como $\mathbb{R}^2$: un autovector de T es un vector que no puede ser *rotado* por T; la acción de T se limita a alterar su módulo y sentido (en caso de que $\lambda < 0$), pero nunca su dirección.

en donde $\boldsymbol{\alpha}$ es el vector de coordenadas de v en la base B_V. La ecuación (4.2) puede escribirse de manera alternativa como

$$(A - \lambda I)\boldsymbol{\alpha} = \mathbf{0}, \tag{4.3}$$

con I la matriz identidad. La ecuación anterior determina un sistema de ecuaciones lineales homogéneo para el vector $\boldsymbol{\alpha}$. Como es sabido, este sistema tendrá una solución distinta de la trivial ($\boldsymbol{\alpha} = \mathbf{0}$) sólo si $\det(A - \lambda I) = 0$. Este determinante da lugar a un polinomio en λ de grado n denominado *polinomio característico*. Por tanto, los autovalores serán precisamente las raíces de dicho polinomio.

Determinado $\mathrm{Sp}(T)$ como acabamos de ver, hemos de calcular los autosubespacios $V(\lambda)$. Para ello, para cada $\lambda \in \mathrm{Sp}(T)$, resolvemos de manera estándar su sistema de ecuaciones homogéneo asociado, ecuación (4.3).

Tratemos de ilustrar este procedimiento con un ejemplo. Sea el operador $T\colon P_2(\mathbb{R}) \to P_2(\mathbb{R})$ tal que $T(ax^2 + bx + c) = 2c + 2(b + c)x + 2ax^2$.

1. Obtención de $\mathrm{Sp}(T)$: Generemos, en primer lugar, una representación matricial *cualquiera* de T. Para ello, elegimos una base de $P_2(\mathbb{R})$. Por simplicidad, elegimos la base canónica de este espacio: $B_{P_2(\mathbb{R})} = \left\{x^2, x, 1\right\}$. En esta base, la representación matricial de T es:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

Por tanto, el polinomio característico será:

$$\begin{vmatrix} 2-\lambda & 0 & 0 \\ 0 & 2-\lambda & 2 \\ 0 & 0 & 2-\lambda \end{vmatrix} = (2-\lambda)^3.$$

Evidentemente la única raíz del polinomio característico es 2 (triple). Cuando se obtienen raíces múltiples, como en este caso, se dice que el autovalor correspondiente (en este caso $\lambda = 2$) tiene una *multiplicidad algebraica* 3: $m_a(2) = 3$.

2. Obtención de los $V(\lambda)$: Como $\mathrm{Sp}(T) = \{2\}$, sólo tenemos que calcular un autosubespacio, $V(2)$. Para ello, hemos de resolver el sistema homogéneo:

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

La solución de este sistema es:

$$\boldsymbol{\alpha} = \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ 0 \end{pmatrix}, \forall \alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{R}.$$

Los polinomios de $P_2(\mathbb{R})$ con esas coordenadas en la base canónica son los del tipo:

$$p(x) = \alpha_1 x^2 + \alpha_2 x, \forall \alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{R}.$$

Por lo que $V(2) = \text{span}(x^2, x)$. A la dimensión de cada autosubespacio se le suele denominar *multiplicidad geométrica*, $m_g(\lambda)$. En nuestro caso, diríamos que $m_g(2) = 2$.

Cerramos esta sección con una observación importante: Como hemos visto, tanto en el procedimiento general de resolución del problema de autovalores y autovectores, como en el ejemplo anterior, el cálculo parte de la elección de una base *cualquiera* de V. En el capítulo anterior (véase la Sección 3.3), al obtener la representación de una transformación lineal en una base, decíamos que la representación era dependiente de la base, y que la única descripción absoluta o *universal* de una transformación era la operacional. Sin embargo, ahora parece que el espectro de un operador, que es algo intrínseco de éste, puede obtenerse matricialmente y partiendo de cualquier base. ¿Por qué?

Vamos a considerar el problema de autovalores en dos bases distintas, B_V y B'_V. Partiendo de (4.1), obtendríamos dos ecuaciones matriciales:

$$A\boldsymbol{\alpha} = \lambda\boldsymbol{\alpha}, \tag{4.4}$$

en la base B_V, y

$$B\boldsymbol{\alpha}' = \lambda\boldsymbol{\alpha}', \tag{4.5}$$

en la base B'_V. El diagrama de cambio de base en este caso, véase (3.7), viene dado por:

$$\begin{array}{ccc} \boldsymbol{\alpha} & \xrightarrow{A} & \boldsymbol{\beta} \\ \downarrow{\scriptstyle P} & & \downarrow{\scriptstyle P} \\ \boldsymbol{\alpha}' & \xrightarrow{B} & \boldsymbol{\beta}' \end{array} \tag{4.6}$$

Es decir, la relación entre ambas representaciones matriciales es $B = PAP^{-1}$. Si empleamos esta relación en (4.5), obtenemos:

$$AP^{-1}\boldsymbol{\alpha}' = \lambda P^{-1}\boldsymbol{\alpha}'. \tag{4.7}$$

Observe que $P^{-1}\boldsymbol{\alpha}' = \boldsymbol{\alpha}$, con lo que (4.7) se reduce a (4.4). Por lo tanto, ambas formulaciones del problema, en bases distintas, conducen al mismo espectro.

En cuanto a los autovectores, como el procedimiento de cálculo permite determinar sus coordenadas ($\boldsymbol{\alpha}$ o $\boldsymbol{\alpha}'$), que serán relativas, en cada caso, a su base, sólo habrá que tener en cuenta este hecho (el que el cálculo es relativo a la base) para obtener los autovectores correspondientes, y con ellos los autosubespacios.

4.3. Diagonalización de operadores

Como decíamos al principio del capítulo, nuestro objetivo es obtener una representación matricial diagonal de un operador $T\colon V \to V$. De acuerdo con la la Observación 1 de la Sección 4.1, sabemos que esto sólo será posible si, con los autovectores de T, podemos construir una base de V. Esta es la razón de que hayamos dedicado las dos secciones precedentes al estudio del problema de autovalores y autovectores de un operador.

En esta sección intentaremos obtener resultados que nos permitan, en la medida de lo posible, dictaminar si un operador es diagonalizable sin tener que encontrar la base de V formada por autovectores de T. Consideraremos dos casos, en función de cómo sea $\mathrm{Sp}(T)$. Un caso, el más sencillo, es el correspondiente a un espectro *no degenerado*: $\mathrm{Sp}(T) = \{\lambda_1, \ldots, \lambda_n\}, \lambda_i \neq \lambda_j$. El segundo caso es el asociado a un espectro *degenerado*: no todos los n autovalores son distintos. Dedicamos las dos subsecciones siguientes a cada uno de estos casos.

4.3.1. Espectro no degenerado

Sea $T\colon V \to V$ un operador sobre V ($\dim(V) = n$). Supongamos que T tiene un espectro compuesto por n autovalores distintos, $\lambda_i, i = 1, \ldots, n$, para un problema de autovalores y autovectores planteado de la forma $T(v_i) = \lambda_i v_i, i = 1, \ldots, n$, con v_i autovector asociado al autovalor λ_i. En este caso, $V(\lambda_i) = \mathrm{span}(v_i)$, con lo que $\dim(V(\lambda_i)) = 1, \forall i$.

El resultado clave en este caso es el siguiente: Los n autovectores de T son linealmente independientes y, por ello, forman una base de V que diagonaliza T. Por tanto, siempre que un operador, definido sobre un espacio de dimensión n, tenga n autovalores distintos, dicho operador será diagonalizable: $A = \mathrm{diag}(\lambda_1, \ldots, \lambda_n)$.

Vamos a demostrar este resultado para un caso sencillo[3] ($n = 2$).

Considere que T tiene sus dos autovalores distintos, $\lambda_1 \neq \lambda_2$. Si designamos mediante v_1 y v_2 a sus autovectores, se tiene que ambos han de ser linealmente independientes.

Para contradicción, supongamos que son linealmente dependientes: $v_2 = kv_1$, con $k \in \mathbb{F}$. Según esto:

$$T(v_2) = T(kv_1) = kT(v_1). \tag{4.8}$$

Como $T(v_1) = \lambda_1 v_1$ y $T(v_2) = \lambda_2 v_2$, la ecuación (4.8) obliga a que $k = 1$, lo que contradice nuestra hipótesis. Por tanto, v_1 y v_2 son linealmente independientes.

El hecho de que el conjunto $\{v_1, \ldots, v_n\}$ sea una base de V tiene, de acuerdo con el Resultado 4 de la Subsección 2.5.4, la siguiente importante consecuencia:

$$V = V(\lambda_1) \oplus \cdots \oplus V(\lambda_n). \tag{4.9}$$

Veamos un sencillo ejemplo de espectro no degenerado. Sea T un operador definido sobre $\mathbb{R}^2$ tal que, en la base canónica de este espacio, posee la siguiente representación matricial:

[3] Generalizar esta demostración sería inmediato.

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}.$$

Si calculamos su espectro, nos encontramos con que $\mathrm{Sp}(T) = \{5, 2\}$. Al tener dos autovalores distintos, podemos concluir que T será diagonalizable en una base formada por los autovectores de T: $B_{\mathbb{R}^2} = \{(2,1), (1,-3)\}$. Compruébelo.

4.3.2. Espectro degenerado

Consideremos ahora que *no* todos los autovalores de T son distintos o, dicho de otra manera, que, a diferencia del caso no degenerado, $m_a(\lambda_i)$ no es necesariamente 1 para todos los $\lambda_i \in \mathrm{Sp}(T)$. Consecuentemente, tampoco tendrán que ser necesariamente 1 todas las $m_g(\lambda_i)$. Pero sigue siendo vigente nuestra Observación 1 de la Sección 4.1: T será diagonalizable sii existe una base de V formada por autovectores de T. Una forma de verificar esto es la siguiente: T será diagonalizable sii $\sum_i m_g(\lambda_i) = n$. Este resultado, también aplicable al caso no degenerado, expresa el hecho de que los autovectores linealmente independientes en cada autosubespacio son, a su vez, linealmente independientes con los del resto de autosubespacios, por lo que si, en total logramos reunir, *rastreando* todos los autosubespacios, n de estos autovectores, tendremos una base de V, una base que diagonalizará T.

Evidentemente, podemos generalizar el resultado (4.9) para incluir el caso degenerado:

$$V = V(\lambda_1) \oplus \cdots \oplus V(\lambda_k),$$

donde la suma ahora afectaría sólo a los autovalores *distintos*.

Para ilustrar las ideas de esta subsección, considere un operador T, definido sobre $P_2(\mathbb{R})$, y que en la base canónica de este espacio posee la siguiente representación matricial:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -2 \\ 2 & 3 & -4 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}.$$

Si calculamos su espectro, nos encontramos con que $\mathrm{Sp}(T) = \{1(\mathrm{doble}), 2\}$. Al no ser los tres autovalores iguales, no podemos garantizar que el operador sea diagonalizable. Pero, si calculamos los respectivos autosubespacios, obtenemos que $m_g(1) = 2$ y $m_g(2) = 1$, con lo que, como $m_g(1) + m_g(2) = 3$, podemos concluir que T será diagonalizable. Compruebe que la base que diagonaliza T es $B_{P_2(\mathbb{R})} = \left\{x^2 - x, 2x^2 + 1, x^2 + 2x + 1\right\}$.

4.4. Ejercicios propuestos

[E-4.1] Sea un operador T definido sobre el espacio $P_2(\mathbb{R})$, y tal que $T(p(t)) = tp'(t)$. Calcule los autovalores y los autovectores de T.

[E-4.2] Sea un operador T definido sobre el espacio $P_3(\mathbb{R})$, y tal que $T(p(t)) = t[p(t+1) - p(t)]$. Calcule los autovalores y los autovectores de T.

[E-4.3] Un operador T sobre $\mathbb{R}^3$ tiene, en la base canónica, la representación matricial:

$$A = \begin{pmatrix} 7 & 4 & 16 \\ 2 & 5 & 8 \\ -2 & -2 & -5 \end{pmatrix}.$$

Calcule:

1. Los autovalores de T.
2. Si T es diagonalizable, calcule la nueva base en la que su representación matricial es diagonal.
3. La matriz de cambio de base.

[E-4.4] Un operador, definido sobre $\mathbb{R}^2$, posee en la base canónica la siguiente representación matricial:

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix},$$

Determine bajo qué condiciones es diagonalizable.

[E-4.5] Obtenga la representación matricial, respecto a la base canónica de $\mathbb{R}^3$, del operador T, definido sobre $\mathbb{R}^3$, tal que:

1. El vector $(1,1,1)$ es autovector de T.
2. El subconjunto $A = \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 : x_1 + x_2 + x_3 = 0\}$ es un autosubespacio de T.
3. $T(0,0,1) = (1,1,1)$.

Repita el ejercicio si A, en lugar de ser autosubespacio de T, es invariante frente a T.

[E-4.6] Sea el operador T, definido sobre $\mathbb{R}^3$, y que actúa según $T(x,y,z) = (2x + y - 2z, 2x + 3y - 4z, x + y - z)$. Se pide:

1. Calcule los autovalores de T.
2. ¿Es T diagonalizable? Razone la respuesta.
3. En caso afirmativo, obtenga la base en la que T es diagonalizable y obtenga la representación diagonal de T.

[E-4.7] Un operador T, definido sobre $\mathbb{R}^3$, posee, en la base canónica, la siguiente representación matricial:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ -1 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Obtenga los subespacios de $\mathbb{R}^3$ invariantes bajo la acción de T. Indique la dimensión de cada uno de los subespacios obtenidos.

[E-4.8] Sea el operador derivada de primer orden, d/dx, definido sobre el espacio $P_3(\mathbb{R})$. Obtenga sus autovalores y los subespacios propios asociados a éstos.

[E-4.9] Sea V un espacio vectorial de dimensión 4. Sobre ese espacio hay definido un operador T que, en una base determinada, posee la siguiente representación matricial:

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Razone si T es o no diagonalizable.

[E-4.10] Un operador T sobre $\mathbb{R}^2$ posee, en una cierta base, la representación matricial $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ \alpha & 1 \end{pmatrix}$, con $\alpha \in \mathbb{R}$. Estudie para qué valores de α **no** es diagonalizable T.

[E-4.11] Determinar un operador T sobre $\mathbb{R}^3$ tal que:

- $T(1,1,0) = (2,2,0)$.
- $V(1) = \big\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x+y=0\big\}$.
- $\dim(\mathrm{Im}(T-I)) = 1$.

[E-4.12] De un operador definido sobre $\mathbb{R}^3$ se sabe que posee un espectro $\{-1,1,2\}$, y que sus autovectores respectivos son $(1,1,0)$, $(1,0,-1)$, y $(1,0,0)$. Obtenga dicho operador.

[E-4.13] Un operador T definido sobre $\mathbb{R}^3$ tiene, en la base canónica de este espacio, la siguiente representación matricial:

$$A = \begin{pmatrix} a & b & 0 \\ c & a & b \\ 0 & c & a \end{pmatrix}.$$

¿Qué relación debe verificarse entre los parámetros a, b y c para que T tenga un autovalor triple?

[E-4.14] Dados los subespacios vectoriales de $\mathbb{R}^3$:

1. $W_1 = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : y = 0\}$.
2. $W_2 = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x - z = 0, y = 0\}$.
3. $W_3 = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x - y = 0\}$.

Determine cuáles de ellos permanecen invariantes frente al operador $T(x,y,z) = (x+2y, -y, 2x+2y-z)$.

4.5. Problemas propuestos

[P-4.1] Un operador, definido sobre $\mathbb{R}^3$, posee en la base canónica, la siguiente representación matricial: $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 3 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$. Obtenga razonadamente una base de $\mathbb{R}^3$ que diagonalice este operador.

[P-4.2] Sea G un operador diagonalizable definido sobre $\mathbb{R}^3$. Se sabe que:

- $v_1 = (-1, 2, 2)$, $v_2 = (2, 2, -1)$, y $v_3 = (2, -1, 2)$ son autovectores de G.
- $G(5, 2, 5) = (0, 0, 7)$.

Calcule el espectro de G.

[P-4.3] Un operador T definido sobre $\mathbb{R}^3$ tiene, en la base canónica, la siguiente representación matricial (a y b son parámetros reales):

$$\begin{pmatrix} a & b & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Estudie para qué valores de a y b es T diagonalizable. En su caso, obtenga las bases que conducen a la representación diagonal.

[P-4.4] De un operador definido sobre $P_1(\mathbb{R})$ se sabe que su espectro es $\mathrm{Sp}(T) = \{1, 4\}$, y que sus autoespacios son $V(1) = \mathrm{span}(3x + 1)$ y $V(4) = \mathrm{span}(2x + 1)$. Obtenga razonadamente $T(x - 3)$.

[P-4.5] En $\mathbb{R}^2$ se define un operador T que rota un ángulo θ a los vectores de este espacio. Determine razonadamente:

1. $T(x, y), \forall (x, y) \in \mathbb{R}^2$.
2. La representación matricial de esta transformación en la base canónica.
3. Los autovalores y autovectores de T cuando $\theta = \pi$.

[P-4.6] Un operador T definido en $\mathbb{R}^3$ posee en la base canónica la siguiente representación matricial:

$$\begin{pmatrix} 1 & u & v \\ 0 & 1 & u \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

con u, v reales no nulos.

1. Calcule los autovalores de T.
2. Proporcione, para cada autovalor, su autoespacio asociado.

[P-4.7] ¿Es el operador T de $\mathbb{R}^3$, dado por $T(x,y,z) = (x-y-z, x+3y+z, -3x+y-z)$, diagonalizable? Razone la respuesta.

[P-4.8] Sea T un operador definido sobre $\mathbb{R}^2$ como $T(x,y) = (y,x)$. Obtenga razonadamente los subespacios de $\mathbb{R}^2$ invariantes bajo la acción de T.

[P-4.9] Sobre $P_2(\mathbb{R})$ hay definido un operador T que, en la base canónica, posee la siguiente representación matricial:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

1. Demuestre razonadamente que T es diagonalizable.
2. Obtenga la base que diagonaliza T.

[P-4.10] En el espacio $(\mathbb{C}^2, +, \cdot, \mathbb{C})$, con las operaciones suma y producto convencionales, hay definido un operador T que, en la base $\{(1,-1), (-1,0)\}$, posee la representación matricial $\begin{pmatrix} 7 & -5 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$. Obtenga razonadamente los subespacios de $\mathbb{C}^2$ invariantes a la acción de T.

[P-4.11] Un operador T definido sobre $\mathbb{R}^3$ posee, en la base canónica, la siguiente representación matricial:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & -2 \\ 2 & 1 & -2 \\ 2 & 2 & -3 \end{pmatrix}.$$

(a) Conteste razonadamente: ¿Es T diagonalizable? En caso afirmativo, obtenga una base que diagonalice T. (b) Calcule A^{198}.

[P-4.12] Un operador T definido sobre $\mathbb{R}^4$ posee, en la base canónica, la siguiente representación matricial:

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & -2 & -3 & -1 \\ -1 & -1 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Sea $G = \{(x,y,z,t) \in \mathbb{R}^4 : x+y+z+t = 0\}$. Conteste razonadamente: ¿Es G invariante frente a T?

[P-4.13] Un operador T definido sobre $\mathbb{R}^3$ posee, en la base canónica, la siguiente representación matricial:

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ -1 & 2 & -1 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Conteste razonadamente: ¿Es T diagonalizable? En caso afirmativo, obtenga una base que diagonalice T.

[P-4.14] Un operador T definido sobre $\mathbb{R}^3$ posee, en la base canónica, la siguiente representación matricial:

$$\begin{pmatrix} \alpha+6 & 1 & 2 \\ \alpha-8 & 1 & -2 \\ -2\alpha-20 & 0 & -7 \end{pmatrix}.$$

Sea $G = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x + y = 0\}$. Conteste razonadamente: ¿Para qué valores de α es G invariante frente a T?

[P-4.15] Sea T un operador definido sobre $\mathbb{R}^3$. En la base canónica su representación matricial es $\begin{pmatrix} 1 & a & 1 \\ 0 & 1 & b \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$. ¿En qué condiciones es T diagonalizable? En caso de que sea diagonalizable, obtenga la base que da lugar a una representación diagonal.

[P-4.16] Sea T un operador arbitrario definido sobre $\mathbb{R}^2$. Trate de probar esta afirmación: "T es diagonalizable en cualquier base en la que su representación matricial tenga determinante negativo".

[P-4.17] Sea T el operador definido sobre $P_2(\mathbb{R})$ de la forma: $T(p(x)) = (x^2+3x+2)p'(x) - 2xp(x)$. (a) Obtenga los autosubespacios de T. (b) ¿Puede expresarse $P_2(\mathbb{R})$ como suma directa de los autosubespacios calculados? Razone sus respuestas.

[P-4.18] Sea T el operador definido sobre $M_2(\mathbb{R})$ de la forma: $T(X) = AX - XA$, con $A = \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & c \end{pmatrix}$, $\forall X \in M_2(\mathbb{R})$. Conteste razonadamente: ¿Cuándo es T diagonalizable?

[P-4.19] Sea T un operador definido sobre $M_2(\mathbb{R})$ de la forma: $T(X) = AX$, $\forall X \in M_2(\mathbb{R})$, con A una cierta matriz de $M_2(\mathbb{R})$. Conteste razonadamente: ¿Tienen T y A los mismos autovalores?

[P-4.20] Un operador T, definido sobre $\mathbb{R}^3$, posee, en la base canónica, la siguiente representación matricial:

$$\begin{pmatrix} 1 & a & 1 \\ -1 & 1 & -a \\ 1 & 0 & a+1 \end{pmatrix}.$$

Obtenga razonadamente: (a) los valores de a para los que T es diagonalizable; y (b) la forma de la base que diagonaliza T.

[P-4.21] Un operador T definido sobre $\mathbb{C}^3$ tiene, en la base canónica de este espacio, la siguiente representación matricial:

$$\begin{pmatrix} 4 & -6 & 4 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Conteste razonadamente: (a) Obtenga los subespacios invariantes de T unidimensionales. (b) ¿Cómo obtendría los subespacios invariantes de T bidimensionales?

[P-4.22] Considere un cierto espacio vectorial $(V, +, \cdot, \mathbb{R})$, y sea T un operador definido sobre él. Se sabe que los subespacios U_1 y U_2 son invariantes frente a T. Sean ahora los subespacios $A = U_1 + U_2$ y $B = U_1 \cap U_2$. Conteste razonadamente: ¿Son A y B invariantes frente a T?

[P-4.23] El operador T definido sobre $\mathbb{C}^3$ posee, en la base canónica de este espacio, la representación matricial:

$$\begin{pmatrix} 0 & 2a & 0 \\ -a & 0 & a \\ 0 & -2a & 0 \end{pmatrix}$$

.

Determine razonadamente los valores de a para los que T es diagonalizable.

[P-4.24] Un operador, definido sobre $M_2(\mathbb{R})$, transforma la matriz $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ en la matriz $\begin{pmatrix} d & a \\ b & c \end{pmatrix}$. Determine razonadamente si este operador es diagonalizable y, en caso afirmativo, determine la base que lo diagonaliza.

[P-4.25] Considere el operador T, definido sobre $\mathbb{R}^2$, que rota un vector un ángulo θ. Determine razonadamente para qué valores de θ es T diagonalizable.

[P-4.26] Un operador T, definido sobre $P_2(\mathbb{R})$, posee, en la base canónica de este espacio, la siguiente representación matricial:

$$\begin{pmatrix} 1-\alpha & -\alpha & -\alpha \\ \alpha & \alpha+1 & \alpha-1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

Determine razonadamente para qué valores de α es T diagonalizable. Obtenga, en su caso, las bases que diagonalicen T.

[P-4.27] Un operador T definido sobre $\mathbb{R}^3$ posee, en la base canónica de este espacio, la representación matricial $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$. Sea el subespacio $G = \mathrm{span}((1, -1, 0), (\alpha, 0, 1))$. Conteste razonadamente: ¿para qué valores de α es G invariante frente a T?

[P-4.28] Un operador T definido sobre $P_2(\mathbb{R})$ posee, en la base canónica de este espacio, la representación matricial $\begin{pmatrix} 1 & 1 & \alpha \\ 0 & 0 & \beta \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$. Determine razonadamente para qué valores de α y β es T diagonalizable, y proporcione una base que lo diagonalice.

[P-4.29] Sea V el espacio vectorial de las funciones reales de variable real con infinitas derivadas, y sea G el subespacio de V definido como $G = \text{span}(\exp(-t), \exp(-t)\cos t, \exp(-t)\text{sen}t)$. Considere el operador T definido sobre V como $T(f(t)) = f'(t), \forall f(t) \in V$. Conteste razonadamente: ¿Es G invariante frente a T?

[P-4.30] Sea la transformación lineal T_1, entre $\mathbb{R}^3$ y $\mathbb{R}^2$, dada por $T_1(x, y, z) = (2x - y, 2y + z)$; y sea la transformación lineal T_2, entre $\mathbb{R}^2$ y $\mathbb{R}^3$, dada por $T_2(x, y) = (4x + 2y, y, x + y)$. Determine razonadamente si son diagonalizables $T_1 \circ T_2$ y $T_2 \circ T_1$.

Capítulo 5

Espacios vectoriales con producto interior

En este capítulo vamos a seguir trabajando con aplicaciones lineales, pero en unos espacios vectoriales *enriquecidos*. El agente causante de este *enriquecimiento* es el *producto interior*. En esencia, un producto interior es un instrumento matemático que permite asignar a cada vector del espacio un número real positivo, el denominado *módulo* del vector, que puede interpretarse como una medida de su *energía*. Además, el producto interior permite medir el grado de *correlación* o *afinidad* entre *dos* vectores del espacio.

El estudiante procedente del Bachillerato español suele tener una idea vaga, sugerida geométricamente en $\mathbb{R}^2$, del producto interior, al que suele conocer bajo la denominación de producto escalar. Esta intuición es valiosa, especialmente en el ámbito proyectivo, pero debe ser sistematizada y generalizada.

No sólo los espacios vectoriales se ven beneficiados por la definición en ellos de un producto interior. El manejo de operadores entre espacios con producto interior también se ve enriquecido. En concreto, veremos que será posible, en algunos casos, dictaminar si un operador admite una representación diagonal sin resolver el problema de autovalores y autovectores del operador, sin siquiera conocer su espectro.

En definitiva, la incorporación de un producto interior a todo lo que hemos visto hasta el momento en este texto abre muchas oportunidades de modelización de problemas relacionados con la ingeniería. En este capítulo exploraremos algunas de estas oportunidades.

5.1. Definición de producto interior

Sea V un espacio vectorial de dimensión finita n dado por $(V, +, \cdot, \mathbb{F})$. Vamos a definir una aplicación entre $V \times V$ y $\mathbb{F}$, de tal manera que a cada par de vectores de V, (u, v), les vamos a asignar un escalar de $\mathbb{F}$ que escribiremos así: $\langle u, v\rangle$. A esta aplicación vamos a exigirle las siguientes propiedades:

1. *Positividad*: $\forall v \in V : \langle v, v\rangle \geq 0$. $\langle v, v\rangle = 0$ sii $v = 0_V$.

2. *Aditividad* con respecto a la primera componente: $\forall u, v, w \in V : \langle u+v, w\rangle = \langle u, w\rangle + \langle v, w\rangle$.

3. *Homogeneidad* con respecto a la primera componente: $\forall u, v \in V, \forall \alpha \in \mathbb{F} : \langle \alpha u, v \rangle = \alpha \langle u, v \rangle$.

4. *Aditividad* con respecto a la segunda componente: $\forall u, v, w \in V : \langle u, v + w \rangle = \langle u, v \rangle + \langle u, w \rangle$.

5. *Homogeneidad conjugada* con respecto a la segunda componente: $\forall u, v \in V, \forall \alpha \in \mathbb{F} : \langle u, \alpha v \rangle = \alpha^* \langle u, v \rangle$.

6. *Simetría conjugada*: $\forall u, v \in \mathbb{F} : \langle u, v \rangle = \langle v, u \rangle^*$.

Vamos a ver varios ejemplos de productos interiores en espacios que ya deberían ser familiares para nosotros (véase la Sección 2.2):

- Ejemplo 1: Sea el espacio $(\mathbb{R}^2, +, \cdot, \mathbb{R})$, y sean $u, v \in \mathbb{R}^2$ tales que $u = (u_1, u_2)$ y $v = (v_1, v_2)$. El producto interior $\langle u, v \rangle = u_1 v_1 + u_2 v_2$ está bien definido en este espacio. Es posible generalizar este producto interior a $\mathbb{R}^n$: $\langle u, v \rangle = \sum_{i=1}^n u_i v_i$. Y hasta a $\mathbb{C}^n$: $\langle u, v \rangle = \sum_{i=1}^n u_i v_i^*$.

- Ejemplo 2: Sea el espacio $(M_2(\mathbb{R}), +, \cdot, \mathbb{R})$, y sean $A, B \in M_2(\mathbb{R})$. El producto interior $\langle A, B \rangle = \mathrm{tr}(AB^t)$ está bien definido en este espacio y, en general, en $M_n(\mathbb{R})$. Si las matrices y el cuerpo son complejos, es posible extender este mismo producto interior de la forma: $\langle A, B \rangle = \mathrm{tr}(AB^*)$.

- Ejemplo 3: Sea el espacio $(P_2(\mathbb{R}), +, \cdot, \mathbb{R})$, y sean $p(x), q(x) \in P_2(\mathbb{R})$. El producto interior $\langle p, q \rangle = \int_{-1}^1 p(x) q(x) dx$ está bien definido en este espacio y, en general, en $P_n(\mathbb{R})$. Si los polinomios fueran de coeficientes complejos y el cuerpo fuera $\mathbb{C}$, podríamos extender este mismo producto interior de la forma: $\langle p, q \rangle = \int_{-1}^1 p(x) q^*(x) dx$. De hecho, podríamos extenderlo al espacio de todas las funciones continuas en $[-1, 1]$.

5.2. Módulo y ortogonalidad

Como se ha dicho al principio, una de las ventajas de introducir un producto interior en un espacio es la posibilidad de asignar, a cada uno de sus vectores, un *módulo* o *energía*. Dado un $v \in V$, definimos su módulo como

$$||v|| = \sqrt{\langle v, v \rangle}.$$

Dados dos vectores $u, v \in V$, su producto interior, $\langle u, v \rangle$, permite cuantificar el grado de *correlación* entre ellos, de tal manera que si este producto interior se anula, diremos que no existe correlación entre ellos, o que son *ortogonales*.

Es sencillo demostrar los siguientes resultados $\forall u, v \in V$:

- Teorema de Pitágoras generalizado: $||u + v|| = ||u||^2 + ||v||^2 + 2\mathrm{Re}\{\langle u, v \rangle\}$. Observe que obtenemos el Teorema de Pitágoras convencional si u y v son ortogonales.

- Desigualdad de Cauchy-Schwarz: $|\langle u, v \rangle| \leq ||u|| \cdot ||v||$. La igualdad sólo se cumple cuando $u = kv, k \in \mathbb{F}$.

- Desigualdad triangular: $||u+v|| \leq ||u|| + ||v||$.
- Igualdad del paralelogramo: $||u+v||^2 + ||u-v||^2 = 2(||u||^2 + ||v||^2)$.

5.3. Bases ortonormales

Considere una lista de m vectores de V: $\{v_1, \ldots, v_m\}$. Esta lista se dice *ortonormal* si todos sus vectores son mutuamente ortogonales y de módulo 1. Esto suele expresarse mediante la función delta de Kronecker[1]: $\langle v_i, v_j \rangle = \delta_{ij}, \forall i, j \in \{1, \ldots, m\}$.

Es posible demostrar sin gran dificultad este importante resultado: Todos los vectores de una lista ortonormal son linealmente independientes. Por tanto, una lista de n vectores ortonormales en un espacio de dimensión n será una base de dicho espacio. Así, podremos definir una base ortonormal de V de la siguiente forma:

$$B_V = \{v_1, \ldots, v_n : \langle v_i, v_j \rangle = \delta_{ij}\}.$$

Emplear bases ortonormales tiene ventajas. En las subsecciones siguientes veremos tres de ellas: (1) las bases ortonormales permiten calcular las coordenadas de un vector en ellas mediante un algoritmo directo y sencillo; (2) las bases ortonormales permiten calcular la representación matricial de una transformación lineal también mediante un algoritmo directo y sencillo; y (3) si se emplean bases ortonormales, las matrices de cambio de base entre ellas son unitarias.

5.3.1. Coordenadas en bases ortonormales

Considere la base ortonormal $B_V = \{v_1, \ldots, v_n\}$. Sea un $v \in V$. Las coordenadas de v en B_V son los α_i de la combinación lineal $v = \sum_{i=1}^n \alpha_i v_i$. La forma convencional de calcular estos coeficientes consiste en resolver los n sistemas de ecuaciones lineales asociados a esta expresión. Sin embargo, si la base es ortonormal, es posible calcular dichos coeficientes de la forma:

$$\alpha_i = \langle v, v_i \rangle, \forall i = 1, \ldots, n. \tag{5.1}$$

En efecto, si sustituimos v en (5.1) obtenemos:

$$\langle v, v_i \rangle = \langle \sum_{j=1}^n \alpha_j v_j, v_i \rangle = \sum_{j=1}^n \alpha_j \langle v_j, v_i \rangle = \sum_{j=1}^n \alpha_j \delta_{ij} = \alpha_i,$$

en donde hemos empleado las propiedades del producto interior y la ortonormalidad de la base.

[1] La función delta de Kronecker se comporta así: $\delta_{ij} = 1$ si $i = j$, $\delta_{ij} = 0$ si $i \neq j$.

5.3.2. Representaciones matriciales en bases ortonormales

Sea una aplicación lineal $T\colon V \to W$. En V y W están definidas las siguientes bases ortonormales:

$$B_V = \{v_1, \ldots, v_n\}, \quad B_W = \{w_1, \ldots, w_m\}.$$

Si queremos calcular la representación matricial de T en estas bases (A, deberíamos resolver n sistemas de ecuaciones, de acuerdo con el procedimiento explicado en la Sección 3.3. Sin embargo, es sencillo demostrar (hágalo) que, al ser ambas bases ortonormales, los a_{ij} de la matriz A pueden obtenerse directamente de la forma:

$$a_{ij} = \langle T(v_j), w_i\rangle, \forall i = 1, \ldots, n; j = 1, \ldots, m. \tag{5.2}$$

5.3.3. Cambios de base entre bases ortonormales

Suponga ahora que en V hay definidas dos bases ortonormales:

$$B_V = \{v_1, \ldots, v_n\}, \quad B'_V = \left\{v'_1, \ldots, v'_n\right\}.$$

De acuerdo con lo que vimos en la Sección 3.4, es posible encontrar una matriz P de cambio de base que transforme coordenadas de un vector relativas a B_V ($\boldsymbol{\alpha}$) en coordenadas relativas a B'_V ($\boldsymbol{\alpha}'$): $\boldsymbol{\alpha}' = P\boldsymbol{\alpha}$. Esta matriz, de acuerdo con lo que acabamos de ver, podemos obtenerla como

$$p_{ij} = \langle v_j, v'_i\rangle.$$

De manera similar, la matriz S que transforma coordenadas de v en la dirección contraria ($\boldsymbol{\alpha} = S\boldsymbol{\alpha}'$) vendrá dada por

$$s_{ij} = \langle v'_j, v_i\rangle.$$

Obsérvese, empleando la simetría conjugada del producto interior, que $s_{ij} = p^*_{ji}$; es decir, $S = P^*$. Pero, como S es realmente P^{-1}, obtenemos $P^{-1} = P^*$, con lo que P es unitaria (véase el Apéndice D).

Evidentemente, el mismo resultado (intercambiando P por Q) se obtendría si el cambio de base fuera en W, por lo que, en nuestro contexto natural de cambio de base (el de las aplicaciones lineales; véase la Sección 3.4), el diagrama para el caso de bases ortonormales seguiría siendo el dado por (3.7), pero ahora $B = QAP^*$.

5.4. Proceso de ortogonalización de Gram-Schmidt

Acabamos de ver que disponer de bases ortonormales respecto de un producto interior presenta ventajas operativas. Sin embargo, no hemos dicho nada sobre cómo obtener bases ortonormales. En la Sección 2.5.5 vimos cómo, a partir de la definición de un espacio, es posible identificar su estructura y llegar a una base. Esa base, lamentablemente, no tiene por qué ser ortonormal. El proceso de ortogonalización de Gram-Schmidt (G-S) es un algoritmo directo que permite, en n pasos, a partir de una base de partida de V, generar otra que sea ortogonal. La normalización de los vectores de esta base ortogonal conduce finalmente a la base ortonormal buscada.

Considere que disponemos de una base de V no ortogonal: $B_V = \{v_1, \ldots, v_n\}$. El proceso G-S consta de los siguientes n pasos:

- Paso 1: $z_1 = v_1$.
- Paso 2: $z_2 = v_2 - \dfrac{\langle v_2, z_1\rangle}{\langle z_1, z_1\rangle} z_1$.
- Paso 3: $z_3 = v_3 - \dfrac{\langle v_3, z_1\rangle}{\langle z_1, z_1\rangle} z_1 - \dfrac{\langle v_3, z_2\rangle}{\langle z_2, z_2\rangle} z_2$.
- Paso n: $z_n = v_n - \dfrac{\langle v_n, z_1\rangle}{\langle z_1, z_1\rangle} z_1 - \dfrac{\langle v_n, z_2\rangle}{\langle z_2, z_2\rangle} z_2 - \cdots - \dfrac{\langle v_n, z_{n-1}\rangle}{\langle z_{n-1}, z_{n-1}\rangle} z_{n-1}$.

Puede demostrarse que esta construcción genera la base de V ortogonal compuesta por los $z_i, i = 1, \ldots, n$. Si ahora normalizamos estos vectores para que tengan módulo 1, $a_i = z_i/||z_i||$, obtenemos la base ortonormal buscada: $\{a_1, \ldots, a_n : \langle a_i, a_j\rangle = \delta_{ij}, \forall i, j\}$.

Como ejemplo de aplicación directa del proceso, se propone ortogonalizar la base de un subespacio de $\mathbb{R}^4$ dada por $\{(1,1,1,1), (1,2,4,5), (1,-3,-4,-2)\}$. Suponga que en $\mathbb{R}^4$ está definido el producto interior convencional. Resultado: $\{(1,1,1,1), (-2,-1,1,2), (8/5, -17/10, -13/10, 7/5)\}$.

5.5. Proyectores ortogonales

Sea $(V, +, \cdot, \mathbb{F})$ un espacio de dimensión finita n en el que hay definido un cierto producto interior. Y sea U un subespacio vectorial de V. Se llama *complemento ortogonal* de U, y se denota como $U^\perp$, al subespacio de todos los vectores de V que son ortogonales a todos los de U; es decir:

$$U^\perp = \{v \in V : \langle v, u\rangle = 0, \forall u \in U\}.$$

Evidentemente, $V = U \oplus U^\perp$, por lo que $\forall v \in V : v = u + u_\perp$, con $u \in U$ y $u_\perp \in U^\perp$ *únicos.*

Supongamos ahora que en U disponemos de una base ortonormal $B_U = \{a_1, \ldots, a_k\}$ $(\dim(U) = k < n)$. Considere ahora los subespacios unidimensionales $U_i = \mathrm{span}(a_i)$. Es evidente que $U = U_1 \oplus \cdots \oplus U_k$, por lo que u podrá escribirse de forma única como $u = u_1 + \cdots + u_k$, con $u_i \in U_i$. Por otra parte, $u = \sum_{i=1}^k \alpha_i a_i$, con $\alpha_i = \langle u, a_i\rangle$. Podemos interpretar u como la *proyección ortogonal* de v sobre U. Al operador que, aplicado sobre v genera u se le llama *proyector ortogonal* sobre U:

$$P_U(v) = u = \sum_{i=1}^{k} \langle v, a_i\rangle a_i. \tag{5.3}$$

Estas son algunas propiedades, de muy sencilla interpretación, de los proyectores ortogonales:

- $\mathrm{Im}(P_U) = U$.
- $\mathrm{Ker}(P_U) = U^{\perp}$.
- $v - P_U(v) \in U^{\perp}, \forall v \in V$.
- $P_U \circ P_U = P_U$.
- $||P_U(v)|| \leq ||v||, \forall v \in V$.

5.6. Optimización de mínimos cuadrados

Muchos problemas de optimización pueden ser interpretados proyectivamente. Considere un $v \in V$ y sea U un subespacio de V. Deseamos obtener el elemento de U *más parecido* a v. ¿Cómo obtenerlo? Evidentemente, lo primero es fijar un criterio con el que *medir el parecido*. Hemos visto que el producto interior de dos vectores permite evaluar su grado de *correlación*, y que el módulo de un vector es una medida de su tamaño o *energía*.

Supongamos que calculamos la proyección de v sobre U mediante (5.3). Generemos el vector diferencia entre v y esta proyección: $v - P_U(v)$. Obtengamos ahora la energía al cuadrado de esta diferencia: $||v - P_U(v)||^2$. Observe ahora que:

$$\begin{aligned} ||v - P_U(v)||^2 &\leq ||v - P_U(v)||^2 + ||P_U(v) - u||^2 \\ &= ||(v - P_U(v)) + (P_U(v) - u)||^2 = ||v - u||^2, \forall u \in U, \end{aligned} \tag{5.4}$$

en donde hemos empleado, en la primera igualdad, el Teorema de Pitágoras (ver 5.2), ya que $v - P_U(v) \in U^{\perp}$. La ecuación (5.4) nos indica que $P_U(v)$ es el vector de U más parecido a v de acuerdo con el producto interior definido en V.

Como ejemplo de formulación de un problema de optimización de acuerdo con este modelo, considere el espacio de todas las funciones reales continuas en el intervalo $[-1, 1]$. En dicho espacio se ha definido el producto interior $\langle f, g \rangle = \int_{-1}^{1} f(x)g(x)dx$. Sea el subespacio $U = P_3(\mathbb{R})$, y sea la función $f(x) = \mathrm{sen} x$. ¿Cuál es el polinomio de tercer grado que mejor aproxima a $f(x)$?

De acuerdo con el formalismo que acabamos de ver, en este caso $v = f(x)$ y $U = P_3(\mathbb{R})$. Para calcular la solución, $P_U(v)$, necesitamos una base ortonormal de $P_3(\mathbb{R})$. Podemos partir de la base canónica, $B_{P_3(\mathbb{R})} = \{x^3, x^2, x, 1\}$, pero esta base no es ortonormal para el producto interior dado, por lo cual deberemos emplear el procedimiento de G-S y obtener la correspondiente base ortonormal $B_{P_3(\mathbb{R})} = \{a_1, a_2, a_3, a_4\}$. Con ella, la solución a nuestro problema es:

$$P_{P_3(\mathbb{R})}(f) = \langle f, a_1 \rangle a_1 + \langle f, a_2 \rangle a_2 + \langle f, a_3 \rangle a_3 + \langle f, a_4 \rangle a_4.$$

Una última observación: La denominación de *mínimos cuadrados* procede del hecho de que en $\mathbb{R}^n$ el error cometido en la aproximación, $||v - P_U(v)||$, y que el método minimiza, tiene, para el producto interior convencional en este espacio, la forma $\sqrt{(v_1 - u_1)^2 + \cdots + (v_n - u_n)^2}$, con $v = (v_1, \ldots, v_n)$ y $u = P_U(v) = (u_1, \ldots, u_n)$.

5.7. Diagonalización de operadores

Retomamos ahora el problema que tratamos de manera general en la Sección 4.3: la búsqueda de una representación diagonal de un operador T definido sobre un espacio V. Añadimos ahora al problema el hecho de que en V hay definido un producto interior. En principio, todo lo indicado en el Capítulo 4 sigue vigente; pero nos preguntamos si la existencia del producto interior supone alguna simplificación en el proceso que permita determinar si T es diagonalizable, y, en su caso, en la obtención de la base que conduce a la diagonalización. Para ello, previamente, vamos a estudiar ciertas regularidades en operadores inducidas por la existencia del producto interior.

5.7.1. El operador adjunto de un operador

Sea un espacio V, de dimensión finita n, en el que hay definido un producto interior $\langle u, v\rangle, \forall u, v \in V$. Dado un operador T sobre V, llamamos el *operador adjunto* de T, y lo designamos mediante T^*, al operador que verifica

$$\langle T(u), v\rangle = \langle u, T^*(v)\rangle, \forall u, v \in V. \tag{5.5}$$

Se puede demostrar que el operador adjunto existe siempre, y es único.

Dados T_1, T_2 dos operadores cualesquiera sobre V, es posible demostrar para ellos las siguientes propiedades:

1. $(T_1 + T_2)^* = T_1^* + T_2^*$.
2. $(\alpha T_1)^* = \alpha^* T_1^*, \forall \alpha \in \mathbb{F}$.
3. $(T_1 \circ T_2)^* = T_2^* \circ T_1^*$.
4. $(T_1^*)^* = T_1$.
5. $I^* = I$.

Si definimos sobre V una base ortonomal $B_V = \{v_1, \ldots, v_n\}$, es posible obtener la representación matricial en dicha base de T^* (B). En efecto, sabemos que $b_{ij} = \langle T^*(v_j), v_i\rangle = \langle v_i, T^*(v_j)\rangle^*$. Si usamos en esta ecuación la condición (5.5), obtenemos $b_{ij} = \langle T(v_i), v_j\rangle^* = a_{ji}^*$. Es decir: $B = A^*$. Por tanto, conocida la representación matricial de T en una base ortonormal (A), la representación matricial de T^* será simplemente A^*.

Diremos que un operador T es *autoadjunto* sii $T = T^*$, lo que matricialmente se traduce en que $A = A^*$; es decir, su representación matricial es *hermítica* (véase el Apéndice D). Observe que si T es autoadjunto, $\mathrm{Sp}(T) \in \mathbb{R}$.

5.7.2. Operadores normales

Un operador T se dice *normal* si conmuta con su adjunto: $T \circ T^* = T^* \circ T$. Si A es la representación matricial de T, necesariamente $AA^* = A^*A$. Veamos dos operadores normales especialmente interesantes.

- Operadores autoadjuntos: Evidentemente, todo operador autoadjunto es normal.
- Operadores unitarios: Son aquellos operadores cuyo inverso es su adjunto: $T^* \circ T = T \circ T^* = I$. Estos operadores preservan el producto interior, en el sentido siguiente: conservan la energía y las correlaciones de los vectores. En el caso de la energía, es sencillo probar, a partir de (5.5), que $\langle u, u\rangle = \langle T(u), T(u), \forall u \in V$, lo que hace que estos operadores sean buenos modelos de procesos lineales no disipativos. Por lo que respecta a las correlaciones, es igualmente sencillo demostrar que $\langle u, v\rangle = \langle T(u), T(v), \forall u \in V$. Finalmente, los autovalores de un operador unitarios tienen todos módulo 1 (intente demostrarlo).

5.7.3. Operadores normales y diagonalización

El siguiente resultado se suele denominar el *Teorema de la Descomposición Espectral* (TDE):

Si T es normal, son equivalentes las siguientes proposiciones:

1. T es diagonalizable en una base ortonormal compuesta por sus autovectores. Además, los autosubespacios de T son mutuamente ortogonales.
2. T admite una *descomposición espectral*:

$$T = \sum_i \lambda_i P_i,$$

donde $\lambda_i \in \mathrm{Sp(T)}$ y los P_i son proyectores ortogonales sobre los autosubespacios $V(\lambda_i)$.

3. $\sum_i P_i(v) = v, \forall v \in V$.

Tratemos de ilustrar estas ideas con un ejemplo sencillo. Sea $T\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ un operador que, en una cierta base *ortonormal* de $\mathbb{R}^2$, posee la siguiente representación matricial:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

Lo primero que observamos es que la representación matricial se ha obtenido en una base ortonormal (es desconocida; denominémosla $\{v_1, v_2 : \langle v_i, v_j\rangle = \delta_{ij}, \forall i, j\}$). Además, como A es simétrica, T es normal, y podemos asegurar, en virtud del TDE, que T será diagonalizable sin necesidad de calcular su espectro ni sus autovectores. Aun así, vamos a calcular su espectro y autosubespacios para validar lo que vimos en el Capítulo 4 y lo acabamos de ver en el TDE.

Un sencillo cálculo nos proporciona $\mathrm{Sp}(T) = \{-1, 3\}$. Este hecho, el que los autovalores sean distintos, nos asegura, según vimos en el Capítulo 4, que T es diagonalizable. Si calculamos los autosubespacios de T obtenemos: $V(-1) = \mathrm{span}(v_1 - v_2)$ y $V(3) = \mathrm{span}(v_1 + v_2)$. Por tanto, la base que diagonaliza T será $\{z_1, z_2\}$, con $z_1 = v_1 - v_2$, y $z_2 = v_1 + v_2$. Observe que esta base es, de acuerdo con el TDE, también ortonormal (verifíquelo): $\langle z_i, z_j\rangle = \delta_{ij}$.

En cuanto a la descomposición espectral de T, como $P_i(v) = \langle v, z_i \rangle z_i$,

$$T(v) = -\langle v, z_1 \rangle z_1 + 3\langle v, z_2 \rangle z_2.$$

5.8. Descomposición de Schur

En el Capítulo 4 hemos visto que, cuando no es posible construir una base de V con los autovectores de T, éste no es diagonalizable. En estos casos, ¿existe alguna base que, aunque no conduzca a una representación diagonal, sí lo haga a una más *sencilla*?

Afortunadamente, la respuesta es afirmativa. La llamada *descomposición de Schur* garantiza que siempre (para cualquier T) es posible encontrar una base ortonormal (no única) en la que la T posea una *representación triangular superior*.

Existe un procedimiento constructivo, basado en el uso recursivo del proceso de ortogonalización de G-S, que proporciona esta base ortonormal. A continuación mostramos, mediante un ejemplo sencillo, las bases de este procedimiento constructivo.

Considere un operador T, definido sobre $\mathbb{R}^3$, y con el producto interior convencional en este espacio. En la base canónica, T tiene la representación matricial:

$$A = \begin{pmatrix} 6 & 4 & -3 \\ -4 & -2 & 2 \\ 4 & 4 & -2 \end{pmatrix}.$$

Un cálculo sencillo nos conduce a que $\mathrm{Sp}(T) = \{2, 0(\text{doble})\}$, $V(2) = \mathrm{span}((-1,1,0))$, y $V(0) = \mathrm{span}((1,0,2))$. Como $\dim(V(2)) + \dim(V(0)) = 2 < 3$, T no es diagonalizable. Tratemos de encontrar una descomposición de Schur de T.

1. Tomo uno de los autovectores de T y lo completo hasta formar una base de $\mathbb{R}^3$. Por ejemplo: $\{(-1,1,0), (0,1,0), (0,0,1)\}$.
2. Ortonormalizo esta base mediante G-S: $\{(-1/\sqrt{2}, 1/\sqrt{2}, 0), (1/\sqrt{2}, 1/\sqrt{2}, 0), (0,0,1)\}$.
3. La matriz de cambio de base entre esta nueva base y la canónica es:

$$P_1^{-1} = \begin{pmatrix} -1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} & 0 \\ 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

4. La representación de T esta nueva base es:

$$B_1 = P_1 A P_1^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & -8 & \sqrt{5}/2 \\ 0 & 2 & -1/\sqrt{2} \\ 0 & 4\sqrt{2} & -2 \end{pmatrix}.$$

5. De la matriz anterior extraigo la submatriz $C = \begin{pmatrix} 2 & -1/\sqrt{2} \\ 4\sqrt{2} & -2 \end{pmatrix}$, y calculo su único autovalor ($\lambda = 0$) y su autosubespacio $V_C(0) = \mathrm{span}((1/3, 2\sqrt{2}/3))$ (a partir de su autovector normalizado).

6. A partir de este autovector genero un vector ortonormal que me permita completar la base ortonormal $\{(1/3, 2\sqrt{2}/3), (2\sqrt{2}/3, -1/3)\}$.

7. Con esta nueva base construyo
$$P_2^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1/3 & 2\sqrt{2}/3 \\ 0 & 2\sqrt{2}/3 & -1/3 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

8. La representación triangular de T es:
$$B = B_2 = P_2 B_1 P_2^{-1} = P_2 P_1 A P_1^{-1} P_2^{-1} = PAP^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & 2/3 & -37/(3\sqrt{2}) \\ 0 & 0 & 9/\sqrt{2} \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

   Observe que, como era de esperar, los autovalores de T aparecen en la diagonal principal de B.

5.9. Descomposición en valores singulares

En el Capítulo 4, y en lo que va de este, nos hemos centrado en el estudio de los operadores y su diagonalización. Cuando ésta no es posible, acabamos de ver que podemos encontrar una base ortonormal en la que obtener una representación matricial triangular. Sin embargo, en el Capítulo 3 no limitamos nuestro tratamiento de las aplicaciones lineales a los operadores. Si la aplicación no es un operador, ésta discurre entre dos espacios, V y W, que no tienen por qué poseer la misma dimensión, por lo que su representación matricial, en cualesquiera bases ortonormales que empleemos en estos dos espacios, no será cuadrada, con lo que carece de sentido pensar en la búsqueda de una representación diagonal. Aun así, podríamos preguntarnos si cabría elegir un par de bases ortonormales, una en V y otra en W, que dieran lugar a una representación que fuera particularmente sencilla. La descomposición en valores singulares (SVD: *Singular Value Decomposition*) permite determinar esa representación sencilla y las bases ortonormales que la generan.

Considere el diagrama general de cambio de base en una aplicación lineal (véase Sección 3.4):

$$\begin{array}{ccc} \boldsymbol{\alpha} & \xrightarrow{A} & \boldsymbol{\beta} \\ \downarrow{\scriptstyle P} & & \downarrow{\scriptstyle Q} \\ \boldsymbol{\alpha}' & \xrightarrow{B} & \boldsymbol{\beta}' \end{array} \tag{5.6}$$

Observe que B, la representación matricial de la aplicación lineal en las nuevas bases, viene dada por $B = QAP^{-1}$, donde A y B son matrices $m \times n$, Q es $m \times m$, y P es $n \times n$. Como suponemos que A es real, P y Q serán ortogonales.

El Teorema de la SVD establece que es posible encontrar sendas bases ortonormales (en V y W) en las que la aplicación lineal tiene una representación matricial del tipo:

$B = \mathrm{diag}(\sigma_1, \ldots, \sigma_p)$, en donde $p = \min\{m, n\}$ y los σ_i, denominados *valores singulares* de la aplicación lineal, son siempre positivos o nulos. Veamos cómo.

Lo primero que observamos es que

$$A^t A = P^t B^t B P. \tag{5.7}$$

Por otra parte,

$$A P^t = Q^t B \tag{5.8}$$

Observe que la matriz $A^t A$ en la ecuación (5.7) es normal, por lo que, según el TDE, será diagonalizable. Podemos interpretar (5.7) precisamente como la relación de semajanza asociada a dicha diagonalización, donde $B^t B$ sería la representación diagonal, y P la matriz de cambio de base asociada en V. Todo ello sugiere el siguiente protocolo para la obtención de la SVD:

1. Construimos la matriz $A^t A$.
2. Calculamos los autovalores de $A^t A$: $\{\lambda_i\}$.
3. Calculamos los valores singulares: $\sigma_i = \sqrt{\lambda_i}$. Estos determinan B.
4. Calculamos los autovectores de $A^t A$. Esto nos permite determinar P^t.
5. Conocidos A, B y P^t, calculamos Q^t a partir de (5.8).

Veamos el funcionamiento de este protocolo mediante un ejemplo concreto. Sea $T\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ tal que, en las bases canónicas de estos espacios, y con el producto interior convencional, posee la siguiente representación matricial:

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 2 \\ 2 & 3 & -2 \end{pmatrix}.$$

1. Construimos la matriz $A^t A$:

$$A^t A = \begin{pmatrix} 13 & 12 & 2 \\ 12 & 33 & -2 \\ 2 & -2 & 8 \end{pmatrix}.$$

2. Calculamos los autovalores de $A^t A$: $\{25, 9, 0\}$.
3. Calculamos los valores singulares: $\{5, 3, 0\}$. Estos determinan B:

$$B = \begin{pmatrix} 5 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \end{pmatrix}.$$

4. Calculamos los autovectores de A^tA: $V(25) = \text{span}((1,1,0))$, $V(9) = \text{span}((-1,1,-4))$, y $V(0) = \text{span}((-1,1,1/2))$. Con lo que:

$$P^t = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} & -1/\sqrt{18} & -2/3 \\ 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{18} & 2/3 \\ 0 & -4/\sqrt{18} & 1/3 \end{pmatrix}.$$

5. Conocidos A, B y P^t, calculamos Q^t a partir de (5.8):

$$Q^t = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} & -1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \end{pmatrix}.$$

A partir de P^t y Q^t es inmediato determinar las nuevas bases que *simplifican* la representación matricial de la aplicación lineal dada (B).

Una última observación: Acabamos de introducir la SVD para una aplicación lineal genérica, por lo que nada nos impide aplicar la SVD a un *operador no diagonalizable*. En efecto, en la definición de nuestro problema de diagonalización de operadores buscamos una misma base de V tanto para el espacio V *origen* como para el destino. La SVD presupone bases *distintas* en *origen* y *destino*. Nada impide, pues, diagonalizar un operador, mediante la SVD, empleando bases distintas. Vamos a mostrarlo con un sencillo ejemplo. Sea un operador definido sobre $\mathbb{R}^2$ que, en la base canónica, y con el producto interior convencional, posee la representación matricial:

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 4 \\ -3 & 3 \end{pmatrix}.$$

Este operador no es diagonalizable en una base *única*, bajo las condiciones vistas en el Capítulo 4, pues sus autovalores son complejos. Sin embargo, sí es posible obtener una representación diagonal en dos bases *distintas* mediante la SVD. Compruebe estos resultados:

$$B = \begin{pmatrix} \sqrt{32} & 0 \\ 0 & \sqrt{18} \end{pmatrix}, \quad P^t = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} & -1/\sqrt{2} \end{pmatrix}, \quad Q^t = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

5.10. Ejercicios propuestos

[E-5.1] Sobre el espacio vectorial $P_2(\mathbb{R})$ se define el producto interior siguiente:

$$\langle p, q\rangle = \sum_{k=1}^{3} p(k)q(k).$$

1. Demuestre que se trata, en efecto, de un producto interior bien definido.
2. Calcule el ángulo que forman entre sí los polinomios $p(t) = t^2+1$ y $q(t) = t^2-1$.

[E-5.2] Demuestre que, en el espacio vectorial de las matrices cuadradas reales de dimensión 2, el producto interior $\langle A, B\rangle = \text{traza}(AB^T)$ está bien definido. A y B son dos objetos arbitrarios del espacio.

[E-5.3] Calcule, empleando el producto interior del ejercicio anterior, el ángulo formado por las matrices siguientes:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

[E-5.4] En el espacio $P_2(\mathbb{R})$ se define el producto interior:

$$\langle p, q\rangle = p(0)q(0) + p'(0)q'(0) + p''(0)q''(0).$$

1. Demuestre que se trata de un producto interior bien definido.
2. Si $\mathcal{A} = \text{span}(t, t^2)$, obtenga $\mathcal{A}^{\perp}$.
3. Calcule el ángulo formado por los polinomios $p(t) = t^2$ y $q(t) = t$.

[E-5.5] En el espacio $P_3(\mathbb{R})$ se considera el producto interior siguiente:

$$\langle p, q\rangle = \int_{-1}^{1} p(t)q(t)dt.$$

1. Demuestre que, en efecto, se trata de un producto interior bien definido.
2. Calcule, empleando el procedimiento de Gram-Schmidt, la base ortonormal asociada a la base canónica, $\{t^3, t^2, t, 1\}$.
3. Calcule el subespacio ortogonal a $\text{span}(1, t, t^2)$.

[E-5.6] En $\mathbb{R}^5$, dotado del producto escalar habitual, se considera el espacio vectorial $\mathcal{A} = \text{span}(v_1, v_2)$, con $v_1 = (-1, 1, 0, 2, 0)$, y $v_2 = (0, 2, 1, 0, 1)$.

1. Determine $\mathcal{A}^{\perp}$.
2. Obtenga una base ortonormal de $\mathcal{A}^{\perp}$.

[E-5.7] Sean, en el espacio $\mathbb{R}^4$, los siguientes vectores: $u = (-2, 1, 3, -1)$ y $v = (1, 4, 0, -1)$. Sobre este espacio hay definido el producto interior estándar: $\langle a, b\rangle = \sum_{i=1}^{4} a_i b_i$, $\forall a, b \in \mathbb{R}^4$.

1. Obtenga la proyección de u sobre $\text{span}(v)$.
2. Obtenga la proyección de u sobre el complemento ortogonal de $\text{span}(v)$.

[E-5.8] Sea $M_2(\mathbb{R})$ el espacio de las matrices cuadradas de orden dos y coeficientes reales. En dicho espacio hay definido el siguiente producto interior: $\langle A, B\rangle = \text{traza}(AB^t), \forall A, B \in M_2(\mathbb{R})$. Sea U el subespacio de $M_2(\mathbb{R})$ formado por todas las matrices diagonales. Calcule la proyección ortogonal de X, un elemento arbitrario de $M_2(\mathbb{R})$, sobre U.

[E-5.9] Sea $\mathbb{R}^2$ con el producto interior estándar, y sean $u = (1, 0)$ y $v = (1, -1)$ dos vectores de $\mathbb{R}^2$. Calcule:

1. $u^\perp$.
2. $v^\perp$.
3. $u^\perp \cap v^\perp$.
4. $\{u, v\}^\perp$.
5. $(\mathrm{span}(u, v))^\perp$.
6. $\mathrm{span}(u^\perp, v^\perp)$.

[E-5.10] Un operador sobre $\mathbb{R}^3$ actúa de la siguiente forma:

$$T(x, y, z) = (3x + 4y - 5z, 2x - 6y + 7z, 5x - 9y + z).$$

Calcule su adjunto.

[E-5.11] Un operador sobre $\mathbb{C}^3$ actúa de la siguiente forma:

$$T(x, y, z) = (2x + (1 - i)y, (3 + 2i)x - 4iz, 2ix + (4 - 3i)y - 3z).$$

Calcule su adjunto.

[E-5.12] Un operador, en una base ortonormal determinada, tiene la siguiente representación matricial:

$$\begin{pmatrix} 1 & i \\ 1 & 2+i \end{pmatrix}.$$

Determine razonadamente si dicho operador admite una representación diagonal y, en caso afirmativo, calcúlela.

[E-5.13] Un operador f, definido sobre $\mathbb{R}^3$, tiene, en la base canónica, la siguiente representación matricial:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & -1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Conteste razonadamente: ¿Es f diagonalizable? ¿Y $f \circ f \circ f \circ f$?

[E-5.14] Demuestre la siguiente proposición: *Los autovalores de un operador unitario poseen módulo 1.*

[E-5.15] Un operador T, definido sobre $\mathbb{R}^2$, posee, en la base canónica, la representación matricial $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$. Obtenga razonadamente la descomposición espectral de T.

[**E-5.16**] Un operador T, definido sobre $P_2(\mathbb{R})$, posee, en la base canónica, la representación matricial $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 4 \\ 1 & 1 & 4 \\ 4 & 4 & -2 \end{pmatrix}$. Obtenga razonadamente la descomposición espectral de T.

[**E-5.17**] Un operador T, definido sobre $(\mathbb{C}^3, +, \cdot, \mathbb{C})$, posee, en la base canónica, la representación matricial $A = \begin{pmatrix} 1 & -i & 0 \\ i & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$. Obtenga razonadamente la descomposición espectral de T.

[**E-5.18**] Una transformación lineal T, definida entre $\mathbb{R}^2$ y $\mathbb{R}^3$, posee, en las bases canónicas de los espacios implicados, la representación matricial $A = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$. Obtenga razonadamente la descomposición en valores singulares de T.

[**E-5.19**] Un operador T, definido sobre $(\mathbb{C}^2, +, \cdot, \mathbb{C})$, posee, en la base canónica, la representación matricial $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$. Obtenga razonadamente la descomposición en valores singulares de T.

5.11. Problemas propuestos

[**P-5.1**] Sobre $\mathbb{R}^2$ hay definido el siguiente producto interior:

$$\langle (x_1, x_2), (y_1, y_2) \rangle = \begin{pmatrix} x_1 & x_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -1/2 \\ -1/2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}.$$

Obtenga razonadamente:

1. $||(2, 1)||$.
2. El ángulo entre $(2, 1)$ y $(3, -1)$.

[**P-5.2**] Sea H el subespacio de $\mathbb{R}^4$ dado por los $(a, b, c, d) \in \mathbb{R}^4 : a + 3b = 4c$. Obtenga razonadamente $H^\perp$.

[**P-5.3**] Un operador T sobre $\mathbb{R}^3$ (en el que está definido el producto interior euclídeo convencional) posee, en la base canónica, una representación matricial simétrica A. Se sabe que $\mathrm{Sp}(T) = \{1(\text{doble}), -1\}$, y que $(1, 1, 1)$ y $(2, 2, 1)$ son autovectores de T asociados al autovalor 1.

1. Obtenga razonadamente A.
2. Conteste razonadamente: ¿Es T diagonalizable?

[**P-5.4**] Sea S el subespacio de $\mathbb{R}^4$ dado por $S = \mathrm{span}((1, -1, 0, 1), (0, 0, 1, 0))$. Obtenga razonadamente:

1. Una base de $S^\perp$.
2. La proyección ortogonal, de acuerdo con el producto interior euclídeo convencional, de $(1,1,1,1)$ sobre S.

[P-5.5] Sea el espacio $P_2(\mathbb{R})$, en el que hay definido el producto interior $\langle p,q\rangle = \int_{-1}^{1} p(x)q(x)dx$, y sea una base ortonormal de este espacio el conjunto $\{e_1,e_2,e_3\}$, con $e_1 = 1/\sqrt{2}$, $e_2 = \sqrt{3/2}x$, y $e_3 = \sqrt{5/8}(3x^2-1)$. Obtenga razonadamente:

1. El operador que proyecta ortogonalmente un polinomio arbitrario de $P_2(\mathbb{R})$ sobre el subespacio $S = \text{span}(x,x^2)$.
2. La representación matricial del operador anterior en la base ortonormal dada.

[P-5.6] Sobre el espacio $P_3(\mathbb{R})$ (polinomios reales de grado menor o igual a 3) hay definido el siguiente producto interior:

$$\langle f,g\rangle = \int_{-1}^{1} f(x)g(x)dx.$$

Sean los siguientes subespacios de $P_3(\mathbb{R})$: $V_1 = \text{span}(1,x)$, $V_2 = \text{span}(x^2-1/3, x^3-3x/5)$.

1. ¿$V_1 \perp V_2$?
2. ¿$P_3(\mathbb{R}) = V_1 \oplus V_2$?

[P-5.7] Un operador T se dice antihermítico si $T = -T^*$. ¿Cómo son los autovalores de un operador antihermítico?

[P-5.8] Sobre el espacio $(M_3(\mathbb{C}),+,\cdot,\mathbb{C})$, con las operaciones suma y producto convencionales, hay definido el producto interior $\langle A,B\rangle = \text{tr}(AB^*), \forall A,B \in M_3(\mathbb{C})$. Obtenga razonadamente el complemento ortogonal del subespacio de las matrices diagonales en $M_3(\mathbb{C})$.

[P-5.9] Sea $(V,+,\cdot,\mathbb{R})$ el espacio vectorial de las funciones reales continuas en el intervalo $[0,2\pi]$ con las operaciones suma de funciones $(+)$ y producto de escalar por función $(\cdot)$ convencionales. En este espacio hay definido el producto interior $\langle f(t),g(t)\rangle = \int_0^{2\pi} f(t)g(t)dt$. Calcule, de acuerdo con este producto interior, la proyección ortogonal de la función t sobre el subespacio $\text{span}(1, \text{sen}t, \cos t)$.

[P-5.10] Obtenga, en la base canónica, la representación matricial del operador que proyecta ortogonalmente elementos de $\mathbb{R}^3$ sobre el plano $x+y-2z=0$. El producto interior definido sobre $\mathbb{R}^3$ es el convencional.

[P-5.11] Un operador T definido sobre $\mathbb{R}^3$ tiene, en la base canónica, la siguiente representación matricial:

$$A = \frac{2}{3}\begin{pmatrix} -1/2 & b/a & c/a \\ a/b & -1/2 & c/b \\ a/c & b/c & -1/2 \end{pmatrix},$$

donde a, b y c son reales no nulos. Conteste razonadamente: ¿Para qué valores de a, b y c es T ortogonal? El producto interior definido sobre $\mathbb{R}^3$ es el convencional.

[P-5.12] Calcule el complemento ortogonal de los siguientes subespacios W empleando los productos interiores indicados:

1. $W = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x + 2y = 0\}$. Producto euclídeo convencional.
2. W es el espacio de las matrices 2x2 reales y diagonales. Producto interior: $\langle A, B\rangle = \mathrm{tr}(AB^t), \forall A, B \in M_2(\mathbb{R})$.

[P-5.13] En $\mathbb{R}^3$, y con el producto interior convencional, calcule la proyección del vector $(1, 1, 3)$ sobre el subespacio generado por los vectores $(0, 3, 1)$ y $(2, 0, 0)$.

[P-5.14] Sea el subespacio de $\mathbb{R}^4$: $V = \{(x_1, x_2, x_3, x_4) : x_1 = x_3 + x_4, x_2 = x_3 - x_4\}$. Obtenga razonadamente el complemento ortogonal de V.

[P-5.15] Un operador sobre $\mathbb{C}^3$ actúa según $T(x, y, z) = (2x+(1-i)y, (3+2i)x-4iz, 2ix+(4-3i)y-3z)$. Calcule su adjunto.

[P-5.16] Calcule razonadamente la proyección ortogonal del vector $(1, 1, 0)$ sobre el plano $x + y - z = 0$.

[P-5.17] Sobre el espacio $P_3(\mathbb{R})$ hay definido el siguiente producto interior: $\langle p, q\rangle = \int_{-1}^{1} p(x)q(x)dx, \forall p, q \in P_3(\mathbb{R})$. Sea el subespacio $Q = \mathrm{span}(1, x, x^2 - 1/3)$. Calcule la proyección ortogonal de $ax^3 + bx^2 + c$ sobre Q.

[P-5.18] Sea T un operador definido sobre $\mathbb{R}^2$. En este espacio está definido el producto interior convencional. En la base canónica, T posee la representación matricial $\begin{pmatrix} 7 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$. Obtenga razonadamente la descomposición espectral de T.

[P-5.19] Sobre el espacio $P_4(\mathbb{R})$ hay definido el siguiente producto interior: $\langle p, q\rangle = \displaystyle\sum_{t=t_1}^{t_5} p(t)q(t), \forall p, q \in P_4(\mathbb{R})$, en donde $t_1 = -2$, $t_2 = -1$, $t_3 = 0$, $t_4 = 1$, $t_5 = 2$. Obtenga razonadamente la mejor aproximación posible de $p(t) = 5 - t^4/2$ en $P_2(\mathbb{R})$.

[P-5.20] Sea el espacio $(\mathbb{R}^4, +, \cdot, \mathbb{R})$ con el producto interior convencional. Obtenga el $v \in \mathrm{span}((1, 1, -1, -1), (1, -1, 1, -1))$ más cercano a $(3, 5, -5, -3)$.

[P-5.21] En el espacio $(\mathbb{R}^3, +, \cdot, \mathbb{R})$ hay definido el siguiente producto interior: $\langle u, v\rangle = u_1v_1 + u_2v_2 + 2u_3v_3$, con $u = (u_1, u_2, u_3)$ y $v = (v_1, v_2, v_3)$. Sea $F = \mathrm{span}(\frac{1}{2}(1, 1, 1), \frac{1}{2}(1, 1, -1))$. Obtenga razonadamente $F^\perp$.

[P-5.22] Sea T un operador definido sobre $\mathbb{R}^3$. En este espacio está definido el producto interior convencional. En la base canónica, T posee la representación matricial

$$\begin{pmatrix} 5 & 4 & 2 \\ 4 & 5 & 2 \\ 2 & 2 & 2 \end{pmatrix}.$$

En caso de que sea posible, obtenga razonadamente la descomposición espectral de T.

[P-5.23] Sea $P_2(\mathbb{R})$, sobre el que hay definido el siguiente producto interior: $\langle p, q\rangle = p(-1)q(-1) + p(0)q(0) + p(1)q(1), \forall p, q \in P_2(\mathbb{R})$. Se pide: (a) Si $A = \text{span}(1, x)$, obtenga $A^{\perp}$. (b) Obtenga la proyección ortogonal de $x^2 - 1$ sobre A. (c) Encuentre el elemento de A a menor distancia de $x^2 - 1$.

[P-5.24] Sea T un operador definido sobre $\mathbb{C}^2$. Sobre este espacio está definido el producto interior convencional: $\langle u, v\rangle = \sum_{i=1}^{2} u_i v_i^*, \forall u, v \in \mathbb{C}^2$. En la base canónica, T posee la siguiente representación matricial:

$$\begin{pmatrix} 4 & 3i \\ 3i & 4 \end{pmatrix}.$$

Obtenga razonadamente la descomposición espectral de T.

[P-5.25] Considere el espacio vectorial $\mathbb{R}^3$ en el que está definido el producto interior convencional. Sea $x = (1, 1, 1)$, y $W = \text{span}((1, 1, 0), (1, -1, 1))$. Calcule razonadamente: (a) La proyección ortogonal de x sobre W. (b) La distancia de x a W. (c) La representación matricial, en la base canónica, del proyector ortogonal sobre W.

[P-5.26] Sea T un operador definido sobre $\mathbb{R}^2$ con el producto interior convencional. En la base canónica, T posee la siguiente representación matricial:

$$\begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}.$$

Obtenga razonadamente la descomposición espectral de T.

[P-5.27] Sea V el espacio de todas las funciones reales con dominio en el intervalo $[-1, 1]$. En este espacio se define el producto interior $\langle f, g\rangle = \int_{-1}^{1} f(t)g(t)dt$, con $f, g \in V$. Sea ahora el subespacio de las funciones impares: $W = \{f \in V : f(t) = -f(-t)\}$. Obtenga razonadamente $W^{\perp}$.

[P-5.28] Sobre el espacio $M_2(\mathbb{R})$ se define el producto interior $\langle A, B\rangle = \text{tr}(AB^t), \forall A, B \in M_2(\mathbb{R})$. Sean $D = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$, y $W = \text{span}(\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix})$. Calcule la distancia mínima entre D y W.

[P-5.29] Sea $M_2(\mathbb{R})$, sobre el que hay definido el producto interior $\langle A, B\rangle = \text{tr}(AB^t), \forall A, B \in M_2(\mathbb{R})$. Obtenga la proyección ortogonal de $X = \begin{pmatrix} 7 & 6 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$ sobre el subespacio de todas las matrices de $M_2(\mathbb{R})$ simétricas.

[P-5.30] Sea el espacio $\mathbb{R}^4$ con el producto interior convencional. Descomponga el vector $(1, 3, -1, 4)$ de $\mathbb{R}^4$ como suma de dos vectores, uno perteneciente al subespacio generado por $(2, 1, 0, 1)$ y $(0, 3, 1, 1)$, y el otro ortogonal a dicho subespacio.

[P-5.31] Un operador T, definido sobre $\mathbb{C}^3$, tiene en la base canónica de este espacio la siguiente representación matricial:

$$\frac{1}{2}\begin{pmatrix} \sqrt{3} & -1 & 0 \\ 1 & \sqrt{3} & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

Sabiendo que sobre $\mathbb{C}^3$ está definido el producto interior convencional ($\langle u, v\rangle = \sum_{i=1}^{3} u_i v_i^*$, con $u = (u_1, u_2, u_3)$ y $v = (v_1, v_2, v_3)$), obtenga razonadamente, en caso de que sea posible, la descomposición espectral de T.

[P-5.32] En el espacio $\mathbb{R}^4$, dotado del producto interior convencional, sea el subespacio $W = \operatorname{span}((0, 2, 1, 0), (1, 1, 0, 1))$. Obtenga razonadamente: (a) La representación matricial, en la base canónica, del operador que proyecta ortogonalmente cualquier vector de $\mathbb{R}^4$ sobre W; y (b) la proyección ortogonal sobre W del vector $(1, 1, 1, 1)$.

[P-5.33] Considere el espacio $P_2(\mathbb{R})$, sobre el que se ha definido el siguiente producto interior: $\langle p, q\rangle = \sum_{i=0}^{2} a_i b_i$, con $p(t) = a_0 + a_1 t + a_2 t^2$ y $q(t) = b_0 + b_1 t + b_2 t^2$. Sea ahora el operador T, definido sobre $P_2(\mathbb{R})$ de la forma: $T(p(t)) = t^2 p(1/t)$. Conteste razonadamente: (a) ¿Es T normal? (b) En caso de que sea posible, obtenga la descomposición espectral de T.

[P-5.34] Sea V el espacio vectorial de las funciones continuas en el intervalo $[-1, 1]$. En este espacio está definido el siguiente producto interior: $\langle f, g\rangle = \frac{1}{2}\displaystyle\int_{-1}^{1} f(t)g(t)dt$, con $f, g \in V$. Obtenga razonadamente la proyección ortogonal de $\operatorname{sen}(\pi t)$ sobre $P_2(\mathbb{R})$.

[P-5.35] Sea el espacio vectorial $P_2(\mathbb{R})$ con las operaciones interna y externa convencionales. En dicho espacio hay definido el siguiente producto interior: $\langle p, q\rangle = \sum_{i=0}^{2} a_i b_i$, con $p(t) = a_0 + a_1 t + a_2 t^2$ y $q(t) = b_0 + b_1 t + b_2 t^2$. Considere el operador T, definido como $T(p) = dp/dt$. Obtenga razonadamente los subespacios de $P_2(\mathbb{R})$ invariantes a la acción de T^*.

[P-5.36] Sobre $\mathbb{C}^3$, con las operaciones interna y externa convencionales, está definido el producto interior usual en este espacio: $\langle u, v\rangle = \sum_{i=1}^{3} u_i v_i^*$. Sea ahora el operador T que, en la base canónica de $\mathbb{C}^3$, posee la siguiente representación matricial: $\begin{pmatrix} 0 & 2 & 1 \\ -2 & 0 & -2 \\ -1 & 2 & 0 \end{pmatrix}$. Determine, en caso de que sea posible, la descomposición espectral de T.

[P-5.37] Considere el espacio vectorial $(\mathbb{C}^3, +, \cdot, \mathbb{C})$ con las operaciones interna y externa convencionales en este espacio. Sea la matriz $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$. Se propone añadir al espacio anterior un producto interior definido como $\langle x, y\rangle = yAx^*$, con $x, y \in \mathbb{C}^3$, Conteste razonadamente: (a) ¿Está este producto interior bien definido? (b) ¿Y si a_{22} fuera -2?

[P-5.38] Sobre $\mathbb{C}^2$, con las operaciones interna y externa convencionales, está definido el producto interior usual en este espacio: $\langle u, v\rangle = \sum_{i=1}^{2} u_i v_i^*$. Sea ahora el operador T que, en la base canónica de $\mathbb{C}^2$, posee la siguiente representación matricial: $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$. Determine, en caso de que sea posible, la descomposición espectral de T.

[P-5.39] Sobre $\mathbb{C}^3$, con las operaciones interna y externa convencionales, está definido el producto interior usual en este espacio: $\langle u, v\rangle = \sum_{i=1}^{3} u_i v_i^*$. Sea ahora el operador T que, en la base canónica de $\mathbb{C}^3$, posee la siguiente representación matricial: $\begin{pmatrix} 2 & -i\sqrt{2} & -i\sqrt{2} \\ i\sqrt{2} & 3 & -1 \\ i\sqrt{2} & -1 & 3 \end{pmatrix}$. Determine razonadamente si T es diagonalizable.

[P-5.40] Considere el espacio $P_5(\mathbb{R})$ con las operaciones interna y externa habituales en este espacio, y en el que está definido el producto interior $\langle p, q\rangle = \displaystyle\int_{-1}^{1} p(x)q(x)dx$. Sea $p(x) = x^5 - x^3 - x$. Conteste razonadamente: ¿a qué distancia está $p(x)$ de $P_2(\mathbb{R})$?

[P-5.41] Considere el espacio $\mathbb{R}^3$ con las operaciones interna y externa convencionales, y sobre el que está definido el producto interior habitual. Sea U el subespacio generado por el vector unitario (a, b, c). Determine razonadamente: (1) la representación matricial, en la base canónica, del operador que proyecta un vector de $\mathbb{R}^3$ sobre U; (2) si este operador es diagonalizable.

[P-5.42] Sobre $\mathbb{R}^2$, con las operaciones interna y externa convencionales, y el producto interior habitual en este espacio, se considera una base ortonormal $B_e = \{e_1, e_2\}$, y otra base $B_f = \{f_1, f_2\}$, con $f_1 = e_1$ y $f_2 = e_1 + e_2$. Se sabe que la representación matricial de un operador T definido sobre $\mathbb{R}^2$, en la base B_f, es:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}.$$

Obtenga razonadamente la representación matricial de T^* en B_f.

[P-5.43] Considere el espacio vectorial $(P_1(\mathbb{C}), +, \cdot, \mathbb{C})$ formado por los polinomios de primer grado complejos, con las operaciones interna y externa convencionales. Sobre este espacio hay definido el producto interior $\langle p, q\rangle = \int_{-1/2}^{1/2} p(x)q^*(x)dx$. Sea ahora la transformación sobre $P_1(\mathbb{C})$ dada por $T(p) = xp(i) - p'(x)$. Se pide que, razonadamente: (a) determine si T es lineal; (b) obtenga una base ortonormal de $P_1(\mathbb{C})$; (c) obtenga la representación matricial de T en la base calculada; y (d) determine si T es un operador hermítico.

[P-5.44] Sobre el espacio $(\mathbb{C}^2, +, \cdot, \mathbb{C})$, con las operaciones interna y externa convencionales, hay definido un operador que, en la base canónica de este espacio, posee la representación matricial $\begin{pmatrix} 2i & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$. El producto interior en este espacio es el convencional: $\langle u, v\rangle = \sum_{i=1}^{2} u_i v_i^*$, $\forall u, v \in \mathbb{C}^2$. Determine razonadamente, en caso de que sea posible, la descomposición espectral de T. ¿Es T diagonalizable?

[P-5.45] Sea un operador T definido sobre $\mathbb{R}^3$ que, en la base canónica, y con el producto interior convencional en este espacio, posee la siguiente representación matricial:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Conteste razonadamente: (a) ¿Es T diagonalizable? En caso afirmativo, ¿en qué base? (b) ¿Admite T una descomposición espectral?

[P-5.46] Sobre el espacio $(\mathbb{C}^2, +, \cdot, \mathbb{C})$ está definido el producto interior convencional. Sea el operador T que, en la base canónica de $\mathbb{C}^2$, posee la representación matricial $\begin{pmatrix} 3+i & -1 \\ 2i & 1-i \end{pmatrix}$. Determine razonadamente si T es diagonalizable, y, en caso afirmativo, obtenga la base que lo diagonaliza.

[P-5.47] Sea $S = \text{span}((1,1,-2),(-1,1,1))$. Obtenga razonadamente todos los vectores de S ortogonales a $(2,1,2)$.

[P-5.48] Considere el espacio $\mathbb{R}^3$ con las operaciones interna y externa convencionales. En este espacio está definido el producto interior estándar. Sean los subespacios $P = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x - 3y + z = 0\}$ y $Q = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x = -2y = -z\}$. Obtenga razonadamente, en la base canónica, las representaciones matriciales de los operadores que proyectan un elemento cualquiera de $\mathbb{R}^3$ sobre P y sobre Q.

Apéndice A

Planteamiento pedagógico

Los ingenieros, para resolver problemas de Ingeniería (véanse las secciones A.3 y A.4), necesitamos *usar* las Matemáticas. Este uso se dirige fundamentalmente en dos direcciones: (1) describir la complejidad y poder modelarla (las Matemáticas como lenguaje), y (2) obtener resultados cuantitativos de nuestros modelos (las Matemáticas como herramienta de cálculo).

En el estudio de las Matemáticas, al menos en el nivel universitario, conviene no perder de vista este *hecho*: No es posible *usar* adecuadamente las Matemáticas sin *comprenderlas*. Es decir, antes de usar bien hay que comprender en profundidad.

A mi juicio, sólo hay una una vía para *comprender* las ideas matemáticas: Ser capaz de *reconstruirlas* en lugar de meramente *recordarlas*. Esta necesidad puede ser muy frustrante para el estudiante que inicia sus estudios universitarios, ya que normalmente supone un enorme *cambio de expectativas* con respecto a las que suele traer del Bachillerato.

A.1. Cambio de expectativas

El largo periodo de la enseñanza pre-universitaria genera, en el estudiante que emerge de ella, unos hábitos y unas expectativas que, en muchas ocasiones, no favorecen su integración en la Enseñanza Superior. Sin ánimo de ser exhaustivo:

- En general, el Bachillerato español actual no sitúa su énfasis formativo en pensar; más bien prioriza la memorización acrítica, la recuperación pasiva de datos, y el reconocimiento de patrones más o menos sencillos. En la Universidad tiene valor formativo sólo aquello que nos obliga a *pensar* con claridad para *comprender en profundidad*.

- La comprensión profunda se inicia en clase, pero muy rara vez se culmina en ésta. Es necesario que el alumno prepare con antelación su asistencia a clase, que desarrolle en ella una gran *atención*, sin distracciones, con una actitud activa; pero no debe esperar que ello, por sí mismo, baste para lograr la comprensión profunda que se le va a exigir. Será necesario un *trabajo individual, perseverante y diario, fuera de la clase*. Este trabajo no debería ser el inducido por la cercanía de un examen, como suele ocurrir en el Bachillerato.

- En cuanto a la evaluación, es importante que el alumno no espere que se le va a exigir, en los procesos de evaluación, la reproducción más o menos literal de lo que ha visto en clase, o su aplicación más o menos inmediata. En la evaluación se va a medir precisamente si ha adquirido o no una comprensión profunda, si es capaz de manipular correctamente ideas matemáticas para usarlas en diferentes contextos, si ha desarrollado una *capacidad resolutiva* (véase la Subsección A.3).

- El profesor de Bachillerato suele ser alguien que ofrece en clase una exposición sistemática y exhaustiva de los contenidos de la asignatura. El alumno trata de transcribir esta exposición en unos apuntes, que serán la base de su estudio. En la Universidad, el profesor debe verse más como un *agente facilitador del aprendizaje*. Su principal misión consiste en (1) guiar, proponer una estructura óptima (material de estudio, y referencias bibliográficas de consulta) para la comprensión profunda de las ideas fundamentales de la asignatura; y (2) resolver los problemas de comprensión que cada alumno tenga. Para esto último es esencial que el alumno recurra al profesor en sesiones personales de tutoría, en las que pueda plantear sus dificultades y obtener la adecuada realimentación.

A.2. Dinámica docente

La dinámica docente que se va a seguir en las asignaturas de Matemáticas está basada en:

1. Facilitar al alumno, con carácter previo, el *material de estudio* de la asignatura. Se tratará de notas generadas por el propio profesor, o de material bibliográfico básico seleccionado de una fuente preferente a la que los alumnos tengan acceso (libro de texto).

2. Facilitar al alumno, de manera programada en el tiempo, unas *pautas concretas de trabajo autónomo* sobre dicho material. Estas pautas constarán de unas lecturas sugeridas, unos ejercicios de aplicación complementarios, y unos problemas algo más ambiciosos.

3. La realización de *sesiones de discusión*, preferiblemente presenciales, concebidas para poner en común y comentar las dificultades detectadas por los alumnos en su aprendizaje, con el fin de resolverlas colectivamente junto con el profesor. Son, por tanto, sesiones que, bien utilizadas, consolidan el aprendizaje del alumno e incrementan su seguridad.

4. La realización de *tutorías personales*, concebidas no como clases particulares, sino como sesiones en las que el alumno pueda preguntar y comentar sobre su trabajo personal en la asignatura, y validar que éste es de calidad (está bien orientado).

Por parte del alumno, se espera que su actividad autónoma consista en:

- La *lectura comprensiva y reflexiva* (no memorística) del material facilitado en los plazos temporales fijados.

- El *trabajo autónomo* sobre los ejercicios de aplicación y los problemas sugeridos.
- La *generación de dudas y dificultades* sobre los dos procesos anteriores, que se trasladarán a las sesiones de discusión en grupo.

Como se ve, este planteamiento pedagógico requiere la *implicación activa y disciplinada del alumno en el proceso de aprendizaje*, algo que, por ser contrario a la experiencia y expectativas del alumno, no será fácil lograr, al menos inicialmente. Por eso es necesario que se convenza de que este cambio, de un aprendizaje pasivo a uno activo, no es "rentable" sólo en estas asignaturas, sino que su esfuerzo de implicación activa es una muy buena inversión de cara a su éxito futuro como estudiante de una Ingeniería.

A.3. Adquisición de capacidad resolutiva

El programa de estudios es exigente, y requerirá mucho trabajo del alumno, un trabajo que, como decíamos, deberá estar supervisado y enfocado personalmente por el profesor a través de las *tutorías.* Es muy importante que el alumno no se desconecte de la asignatura, que siga las pautas que se le ofrecen, que *asista regularmente a clase y participe*, que intente resolver por su cuenta, antes de que sean resueltos conjuntamente en clase, los problemas que se le proponen para el diagnóstico de la adquisición de conceptos y manejo de modelos de referencia. Lamentablemente, esto no es suficiente para desarrollar la *capacidad resolutiva* necesaria en Ingeniería, por lo que, si un alumno se queda en esta fase, fracasará. Es preciso que, superada esta *necesaria* fase de adquisición de conocimientos, el alumno ponga a prueba su madurez matemática con problemas de exámenes de otros años (los Problemas propuestos al final de cada capítulo). Poco a poco irá comprobando que su *capacidad resolutiva* se incrementa, que su capacidad de análisis mejora, que ha perdido el miedo a los problemas, y los ve, cada vez más, como retos con los que consolidar esta capacidad.

Conviene no olvidar que enfrentarse a problemas es la única vía para verificar la comprensión profunda de las ideas. No es infrecuente, en estos primeros pasos en la Universidad, *creer haber entendido* algo y descubrir, ya después del examen, que *no* se había entendido, con la consiguiente frustración. La realización *sistemática y deliberada* de problemas permite *verificar que uno ha entendido realmente*, y *consolidar buenos hábitos de análisis* que facilitan pensar con claridad y poder así enfrentarse a problemas cada vez más sofisticados. Quizás el mejor hábito de análisis consista en, ante un problema, no centrarse tanto en buscar la solución a toda costa por analogía con otros problemas, como en formularse las preguntas adecuadas, aquellas cuya respuesta nos conduzca de manera *natural* a la solución. En relación con esto último, debe evitarse repetir una y otra vez los mismos problemas; no es un método eficaz de aprendizaje, y genera una falsa seguridad. Siempre es mejor dedicar el tiempo a enfrentarse a problemas de naturaleza lo más diversa posible

Una última observación: nunca se facilitan problemas resueltos, ni soluciones de los problemas que se proponen en clase. Esto es deliberado. A diferencia de lo que suele ocurrir en el Bachillerato, nuestro énfasis no se halla tanto en *llegar a la respuesta correcta* en un conjunto de *escenarios tipo*, como en *discutir críticamente* las posibles vías que conduzcan a dicha solución, pues ello enriquecerá nuestro conocimiento de la disciplina; todo ello sin perjuicio de que deba alcanzarse finalmente la solución al problema planteado. En este sentido, debe combatirse un hábito muy pernicioso: convertirse en un *lector de problemas resueltos*. No favorece la comprensión profunda, y suele generar también la mencionada falsa seguridad en los alumnos.

A.4. Metodología de resolución de problemas

Como acabamos de decir, uno de los principales objetivos de las asignaturas de Matemáticas de primer curso es desarrollar la *capacidad resolutiva* de los estudiantes (véase "Matemáticas y GIST: Guía para el Estudio"). La Ingeniería tiene como foco la resolución de problemas. Es más, la aspiración de todo ingeniero debería ser convertir la resolución de problemas en algo estimulante, divertido incluso, no en algo *problemático*. Por tanto, si el estudiante de Ingeniería no desarrolla esta capacidad, es difícil que progrese en sus estudios.

Los estudiantes que emergen del Bachillerato español suelen tener bastante interiorizada una metodología de resolución de problemas que podríamos denominar de *identificación-selección* (IS). Básicamente, el estudiante, ante un determinado problema, debe *identificar* a qué tipología de las estudiadas pertenece éste, y *seleccionar* el método de resolución asociado a dicha tipología. Esta metodología puede ser útil con problemas de una complejidad limitada, pero resulta inviable con problemas más complejos, del tipo de los que abordan los ingenieros.

Una metodología alternativa, apta para la resolución de problemas complejos, tendría las siguientes fases:

1. Comprensión del problema

2. Reflexión mediante Modelos de Referencia adecuados

3. Generación de una estrategia de resolución

Expliquemos cada una de estas fases con algo de detenimiento.

A.4.1. Comprensión del problema

En la metodología IS el alumno, nada más enfrentarse al problema, busca *clasificarlo*. Esta clasificación depende fuertemente de establecer relaciones de analogía entre el problema facilitado y las tipologías de problemas conocidas. En la mayoría de los casos sencillos, es posible hacer esto sin haber comprendido bien el problema. Realmente, no hace falta. Sin embargo, si el problema tiene una cierta complejidad, es muy probable que éste no *encaje* en ninguna de las tipologías conocidas, con el consiguiente bloqueo del estudiante. Cuando esto ocurre, es conveniente abandonar el proceso de búsqueda de analogías e invertir el tiempo y la energía en comprender bien el problema.

La clave para comprender un problema es determinar, sin ambigüedad, qué se nos pide en él. Unas veces será obtener un resultado numérico (por ejemplo, el volumen de un objeto), pero otras será determinar las condiciones que hacen posible algo que se prescribe en el enunciado (por ejemplo, bajo qué condiciones el volumen de un objeto es máximo).

Evidentemente, no es posible saber qué hay que obtener en un problema si no se es capaz de leer comprensivamente su enunciado. Esto puede resultar ofensivo para el estudiante universitario, pero es un hecho que los estudiantes suspenden exámenes por no hacer una lectura comprensiva de sus enunciados.

A.4.2. Reflexión mediante Modelos de Referencia adecuados

Una vez determinado claramente el objetivo del problema, lo siguiente es *pararse a pensar*. Lo primero en lo que hay que pensar es en los *modelos de referencia* que pudieran estar implicados en la resolución del problema. Un Modelo de Referencia (MR) es un esquema teórico, generalmente de naturaleza matemática, de una realidad compleja, que se elabora para facilitar su comprensión y el estudio de su comportamiento. Cualquier disciplina está constituida por un conjunto de MR interrelacionados formando una red. El estudiante debe estar familiarizado con el uso y las limitaciones de estos MR. Precisamente en eso consistirá el *estudio* de una disciplina.

A.4.3. Generación de una estrategia de resolución

Determinados los MR potencialmente implicados en la resolución del problema, lo siguiente será combinarlos para sintetizar una estrategia tentativa de resolución del problema. Esta estrategia inicial puede que no sea la definitiva, ni siquiera la mejor de las posibles, pero constituye el inicio de un diálogo concreto con el problema, del que emanará una estrategia que haga viable alcanzar la solución. La estrategia constará de un Planteamiento y un Desarrollo. En el Planteamiento se especificará la secuencia de acciones que nos llevarán a la solución; en el Desarrollo ejecutaremos, sobre los datos concretos del problema, este Planteamiento. En ocasiones puede que obstáculos en el Desarrollo nos lleven a reformular alguna porción del Planteamiento. Resolver un problema es siempre una actividad que involucra una gran creatividad. Debe verse como un reto.

Conocer una metodología, por buena que sea, no basta para desarrollar la capacidad resolutiva. Es necesario acostumbrarse a *usarla bien*. El profesor, en las Sesiones de Taller, ilustrará este uso ante los estudiantes, pero la asimilación de la metodología sólo se consigue con sesiones individuales de *práctica deliberada*. Estas sesiones deberán ser frecuentes, intensas y cortas. Supondrán un esfuerzo cognitivo grande, especialmente al principio. Es posible que el estudiante tenga la impresión de que le resulta más *rentable* seguir empleando la metodología IS, pero, a la larga, la metodología descrita le proporciona una mayor seguridad acerca de la eficacia real de su aprendizaje.

A.5. Actitud

Como decíamos al principio de este apéndice, un principio básico en cualquier proceso de aprendizaje exitoso es partir de una motivación clara. Esta motivación se traduce en una actitud positiva que el alumno debe sostener a lo largo del proceso. El fracaso, o la amenaza del fracaso, suele ser el elemento que más erosiona esta deseada actitud. Podríamos decir que, al menos en los inicios de la vida universitaria, la secuencia real de progreso en la adquisición de la necesaria capacidad resolutiva es la siguiente:

1. Intentar.
2. Fracasar.
3. Reintentar.
4. Fracasar.
5. **Preguntar (Tutoría)**.
6. Reintentar.
7. Resolver.

Este proceso de aprendizaje exige en el estudiante tres disposiciones muy concretas (las tres "C"):

- **C**onfianza en uno mismo: Es muy difícil trabajar sobre un problema si uno, de partida, cree que no va a poder resolverlo. Por eso es muy recomendable ir progresivamente abordando problemas cada vez más complejos, hasta perder el miedo al fracaso. Enfrentarse tempranamente a problemas complejos (sin pasar antes por los Ejercicios propuestos) puede ser muy frustrante y desalentador.
- **C**oncentración: Las matemáticas exigen educar nuestra capacidad de concentración; lamentablemente, vivimos en un mundo en el que, de manera natural, nos rodean numerosísimas fuentes de distracción, de entre las cuales, por su capacidad para interrumpir nuestra concentración, destaca la mensajería instantánea asociada a las redes sociales. Es muy importante acostumbrarse a usar el *modo avión* de nuestros dispositivos para garantizar tramos de estudio con concentración plena. Al principio, no será fácil, pero poco a poco uno comprueba que incrementa su capacidad de concentración, con lo que el desgaste psicológico, inducido por las permanentes interrupciones, desaparece. Sin este autocontrol, es difícil alcanzar los niveles de concentración necesarios para lograr el éxito.
- **C**oraje: La perseverancia, alimentada por el coraje personal para perseguir un objetivo, es fundamental en todo el proceso de aprendizaje anteriormente descrito. Querer algo es importante, pero no dejar de quererlo lo es mucho más.

Finalmente, es importante tener una *intención general positiva* ante el trabajo: cada vez que se trabaje, es necesario acostumbrarse a querer hacerlo siempre bien, se trate de un examen final, una prueba parcial, o un problema al que uno se enfrenta en la mesa de la cocina de su casa. Sólo así se consolida una mejora, por muy pequeña que inicialmente parezca, en la capacidad resolutiva.

Apéndice B

Cómo estudiar una Ingeniería

El estudiante de una Ingeniería debe anticipar que, cuando sea Ingeniero, se va a dedicar fundamentalmente a *resolver problemas*, y que uno de sus mayores recursos como profesional será *saber pensar con claridad sobre cuestiones complejas*. Por tanto, la mejor inversión que puede hacer el estudiante es: (1) acostumbrarse al *aprendizaje profundo* de las disciplinas que estudia, y (2) desarrollar en ellas una alta *capacidad resolutiva*.

El aprendizaje profundo y la capacidad resolutiva se adquieren y desarrollan a partir del *estudio activo* y la *práctica deliberada*.

B.1. Estudio activo

Para estudiar bien hay que tener un buen material de estudio. Esto puede parecer una obviedad, pero muchos estudiantes fracasan por no trabajar sobre el material adecuado. Este material debe ser facilitado por el profesor. Estará formado por libros, presentaciones, y apuntes, fundamentalmente.

Para estudiar bien hay que leer. Y hay que hacerlo de una determinada manera: No se puede leer un texto técnico como se lee el "Marca" o un volumen de "Juego de tronos".

La mejor forma de *leer para estudiar* es leer tratando de identificar y extraer del texto las ideas principales y sus relaciones. Con ellas se podrán ir elaborando pequeños modelos de referencia que serán la base del estudio. De manera general, un *Modelo de Referencia* (MR) es un esquema teórico, generalmente de naturaleza matemática, de una realidad compleja, que se elabora para facilitar su comprensión y el estudio de su comportamiento. Cualquier disciplina está constituida por un conjunto de MR interrelacionados formando una red. La responsabilidad del estudiante es entender estos MR, conocer sus limitaciones, y aprender a usarlos de manera individual mediante ejemplos sencillos; más adelante deberá identificar las interrelaciones entre los distintos MR, y su posible integración. Todas estas acciones son *activas* y requieren que el estudiante *piense escribiendo y dibujando esquemas o mapas conceptuales*. La *visualización* de las ideas es crucial en esta etapa.

Para estudiar bien hay que dudar en diálogo con el material de estudio: ¿Tengo claras cuáles son las ideas principales? ¿Seguro que no me dejo nada importante sin identificar? ¿Cuáles son las ideas totalmente nuevas para mí? ¿Cuáles puedo relacionar con cosas que ya sé? ¿Entiendo bien el significado de todos los términos empleados? ¿Qué partes del material entiendo peor?

Si uno avanza sin hacerse estas preguntas, avanzará en falso, sobre un terreno quebradizo. Es *muy peligroso*. Casi *suicida*.

B.2. Práctica deliberada

Tras una familiarización, lo más intensiva posible, con los principales MR de la disciplina, llega el momento de *practicar su uso* para autoevaluar el aprendizaje profundo de los MR, y alcanzar la necesaria capacidad resolutiva. Esto debe hacerse progresivamente, en dos fases:

- Fase I: Realización de ejercicios con una orientación clara al uso de *un* MR concreto. Esta fase puede darse por finalizada si el estudiante es capaz de enfrentarse con éxito a este tipo de ejercicios para *todos* los MR correspondientes al bloque de estudio del que se trate.
- Fase II: Realización de problemas de examen. Estos problemas son más complejos, en el sentido de que se plantean para que el estudiante tenga que usar creativamente varios MR de manera conjunta en contextos más exigentes que los de los ejercicios de la Fase I.

En ambas fases se aconseja emplear la metodología propuesta en la Sección A.4.

Es muy recomendable no intensificar demasiado la práctica deliberada asociada a cada bloque de materia. Aunque inicialmente no lo parezca, es mucho más eficaz distribuir las prácticas de los distintos bloques. Así, si una materia determinada está compuesta por tres bloques A, B, y C, es posible una aproximación *intensiva* del tipo:

- Sesión 1: Teoría A
- Sesión 2: Práctica A
- Sesión 3: Práctica A
- Sesión 4: Práctica A
- Sesión 5: Teoría B
- Sesión 6: Práctica B
- Sesión 7: Práctica B
- Sesión 8: Práctica B
- Sesión 9: Teoría C
- Sesión 10: Práctica C
- Sesión 11: Práctica C
- Sesión 12: Práctica C

Esta forma de proceder tiende a generar, al final de cada bloque, una sensación de dominio en el alumno, pero conviene no perder de vista que, una vez que se da por terminado un bloque, el trabajo realizado, aunque intenso, tiende a ser olvidado, pues no hay previsto, quizás hasta el examen, un mecanismo de reactivación de estos contenidos.

Como decimos, es mucho más eficaz a la larga una aproximación *distribuida* del tipo:

- Sesión 1: Teoría A
- Sesión 2: Práctica A
- Sesión 3: Teoría B
- Sesión 4: Práctica B
- Sesión 5: Teoría C
- Sesión 6: Práctica C
- Sesión 7: Práctica A,B
- Sesión 8: Práctica A,B
- Sesión 9: Práctica A,B,C
- Sesión 10: Práctica A,B,C
- Sesión 11: Práctica A,B,C
- Sesión 12: Práctica A,B,C

El estudiante que emplea esta aproximación tiende a pensar que esta forma de proceder es más ineficiente, pero suele ser porque al principio, en las sesiones iniciales, quizás tenga la sensación de no avanzar a la suficiente velocidad. Sin embargo, esto *no* es lo importante. Lo importante es el grado de consolidación de la capacidad resolutiva *al final* del proceso, tras las 12 sesiones de trabajo.

Se opte por la aproximación intensiva o la distribuida, conviene en cualquier caso espaciar las sesiones de trabajo en el tiempo, pues esto favorece la maduración progresiva. Como regla general, no deberían programarse para el mismo día más de dos sesiones seguidas de trabajo. Esto obliga a organizar el estudio diario entre varias asignaturas de la forma:

- Tramo de dos sesiones Asignatura x
- Tramo de dos sesiones Asignatura y
- Tramo de dos sesiones Asignatura z

Obsérvese que en las transiciones entre asignaturas, de x a y, o de y a z, necesitaremos unos tiempos para la *recuperación contextual* de la segunda asignatura. Esto va a suponer un esfuerzo adicional, pero que contribuye decisivamente al aprendizaje profundo.

B.3. El papel de la motivación

Es triste reconocer que, alrededor de la motivación, proliferan los *cantamañanas de ocasión* que logran seducir a muchos por la vía de la manipulación de las emociones (*emocionalismo*), haciéndoles creer que todo es posible, por muy complicado que parezca, sin más que *quererlo*. Quizás con esta receta se pueda ganar el campeonato de paddle de la "urba", pero no convertirse en ingeniero.

En nuestro caso, la mayor o menor motivación del estudiante debe dirigirse en tres direcciones: (1) educar la concentración, (2) educar la perseverancia, y (3) gestionar el fracaso.

B.3.1. Educar la concentración

El estudio de disciplinas técnicas, de naturaleza compleja, exige educar nuestra capacidad de concentración; lamentablemente, vivimos en un mundo en el que, de manera natural, nos rodean numerosísimas fuentes de distracción, de entre las cuales, por su capacidad para interrumpir nuestra concentración, destaca la mensajería instantánea asociada a todo tipo de redes sociales. Es muy importante acostumbrarse a usar el "modo avión" de nuestros dispositivos para garantizar tramos de estudio con concentración plena. Al principio, no será fácil, pero poco a poco se comprueba un aumento de la capacidad de concentración, y se reduce el desgaste psicológico inducido por las permanentes interrupciones.

B.3.2. Educar la perseverancia

Saber lo que hay que hacer para alcanzar el éxito, pero hacerlo sólo una tarde o dos, no vale para nada. Los estudios universitarios son asimilables a una carrera de fondo. Casi todo el mundo entiende que para correr un maratón hay que entrenar a diario y durante mucho tiempo, pero poca gente entiende que lo mismo pasa con el Álgebra Lineal o el Cálculo. Es necesario planificar el tiempo de estudio, y *someterse* a esa planificación, sabiendo que posiblemente sea necesario, en función de la evolución de las circunstancias, reevaluar dicha planificación inicial y modificarla. El progreso académico es incompatible con la pasividad y la inconstancia.

B.3.3. Gestionar el fracaso

El fracaso es inevitable. Vivimos en una cultura que idolatra el éxito y oculta el fracaso. Sin embargo, el fracaso para el estudiante es tan necesario como el dolor para el médico: el dolor permite identificar la enfermedad; el fracaso académico permite detectar que nuestro estudio no es el adecuado.

Ante el fracaso académico caben dos posibilidades: huir ("esto no es lo mío", "no valgo para esto"), o aprender de él, y *gestionarlo*. Si se opta por lo segundo, es preciso tener muy presente que toda gestión de un fracaso debe arrancar de un análisis objetivo de sus causas. Descartando la indolencia o la irresponsabilidad, urge hacerse las siguientes preguntas y tratar de darles, con la mayor franqueza, respuesta:

- ¿Qué parte de mi preparación en cada asignatura me ha servido y qué parte no?
- ¿Qué podría haber hecho, y no he hecho, que me habría servido?
- ¿Qué cosas he hecho bien, pero tarde?
- ¿Qué mecanismos de ayuda ofrecidos por los profesores he usado y cuáles no?
- ¿Qué voy a hacer a partir de ahora para mejorar mis posibilidades de éxito?

Desde mi punto de vista, las cuatro primeras preguntas deben conducir a erradicar de la dinámica de estudio seguida las malas actitudes y los malos hábitos. Entre ellos pueden estar, y no trato de ser exhaustivo: la falta de asistencia a clase, la falta de atención en clase, la mala gestión del tiempo, la ausencia de planificación de las tareas, no usar las tutorías (trabajar sin supervisión externa), no trabajar lo suficiente con posterioridad a las clases, no anticipar los contenidos de las clases, no seguir las recomendaciones de los profesores, comer mal, no descansar lo suficiente, etc. Esta erradicación exigirá un esfuerzo deliberado y sostenido, un compromiso diario que debería, en esencia, constituir la respuesta a la quinta pregunta.

En conclusión: Hay un método para estudiar eficazmente una Ingeniería. Un método que sabemos que funciona, y cuya aplicación requiere un esfuerzo bien dirigido. Ese método es el que se condensa en este documento.

Apéndice C

Manipulación de números complejos

En la Sección 1.4.3 hemos introducido la estructura algebraica denominada *cuerpo*. Uno de los cuerpos más empleados en el Álgebra Lineal es el de los números complejos, que suele denominarse mediante la letra $\mathbb{C}$. Sobre este conjunto se definen dos operaciones internas, que suelen designarse mediante los símbolos convencionales $+$ y $\cdot$, para referirse, respectivamente, a la suma y producto de números complejos, con lo que la estructura suele escribirse así: $(\mathbb{C}, +, \cdot)$. Analicemos, antes de ver propiamente el sentido de las operaciones, la estructura del conjunto $\mathbb{C}$.

Los elementos $z \in \mathbb{C}$ suelen representarse de la forma $z = a + ib$, donde a y b son dos números reales cualesquiera, e $i = \sqrt{-1}$. A a se le llama la *parte real* de z, y a b la *parte imaginaria*. Si reunimos a ambas en un par ordenado, (a, b), vemos que z puede verse como un punto de $\mathbb{R}^2$, y, consecuentemente, ser representado en el plano como si del punto (a, b) se tratara. Tendríamos así que la parte real se correspondería con la abscisa del punto, y la parte imaginaria con la ordenada. Este marco para la representación se denomina el diagrama de Argand[1].

Recuerde que un punto $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ puede representarse también de manera polar, (r, θ), donde r (el llamado *módulo*) es la distancia del punto al origen de coordenadas, y θ (la llamada *fase* o *argumento*) es el ángulo compuesto por el punto, el origen de coordenadas y el eje de abscisas. Obviamente, la relación entre ambas representaciones es:

$$r = \sqrt{a^2 + b^2}, \quad \theta = \operatorname{arctg}(b/a),$$

o, de manera inversa,

$$a = r\cos\theta, \quad b = r\operatorname{sen}\theta.$$

Los números complejos admiten también una representación polar o *fasorial*. A partir de lo que acabamos de ver:

$$z = a + ib = r\cos\theta + ir\operatorname{sen}\theta = r\exp(i\theta),$$

[1]Esto es consecuencia de que $\mathbb{R}^2$ y $\mathbb{C}$ son isomorfos. Véase la Sección 3.2.

donde en la última igualdad hemos empleado la fórmula de Euler:

$$\exp(i\theta) = \cos\theta + i\mathrm{sen}\theta.$$

Como se ha dicho al principio, las dos operaciones que dotan a $\mathbb{C}$ de las estructura de cuerpo son la suma y el producto de números complejos. Vamos a verlas, de manera separada, en las dos siguientes secciones.

C.1. Suma de números complejos

Considere $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$ tales que $z_1 = a_1 + ib_1$ y $z_2 = a_2 + ib_2$. Se define la suma de z_1 y z_2 como $z_1 + z_2 = (a_1 + a_2) + i(b_1 + b_2)$. Es decir, la suma de dos números complejos es un número complejo tal que su parte real es la suma de las partes reales de cada uno de los números complejos, y su parte imaginaria es la suma de las partes imaginarias de cada uno de los números complejos. Observe que no es fácil sumar dos números complejos si éstos están dados en su forma polar. De hecho, resulta necesario convertirlos previamente a su forma natural $(a + ib)$.

C.2. Producto de números complejos

Dados $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$, su producto, $w = z_1 \cdot z_2$, será también un número complejo. La forma más directa de llegar a w consiste en partir de las representaciones polares de z_1 y z_2:

$$w = z_1 \cdot z_2 = r_1 \exp(i\theta_1) \cdot r_2 \exp(i\theta_2) = r_1 r_2 \exp(i(\theta_1 + \theta_2));$$

es decir, w es un número complejo con un módulo resultado de multiplicar los módulos de los dos números complejos, y con una fase que es la suma de las fases de los dos números complejos.

Si el producto se plantea a partir de las representaciones naturales de los dos números complejos, $z_1 = a_1 + ib_1$ y $z_2 = a_2 + ib_2$, entonces, sin más que operar, obtenemos:

$$w = z_1 \cdot z_2 = (a_1 + ib_1) \cdot (a_2 + ib_2) = (a_1 a_2 - b_1 b_2) + i(a_1 b_2 + a_2 b_1).$$

A la vista de las dos aproximaciones anteriores al producto, resulta evidente, especialmente si el producto se extiende a más números complejos, que este tipo de cálculos deben realizarse empleando las representaciones polares de los números involucrados.

C.3. Conjugación de números complejos

Dado $z = a + ib \in \mathbb{C}$, se llama *conjugado* de z, que representaremos como z^*, al número complejo $a - ib$. Si z viene dado en su forma polar $(z = r\exp(i\theta))$, entonces $z^* = r\exp(-i\theta)$. Se recomienda verificar la plena equivalencia de ambas aproximaciones.

La conjugación de números complejos permite calcular las partes reales e imaginarias de un número complejo mediante las siguientes expresiones:

$$\mathrm{Re}\{z\} = \frac{z + z^*}{2}, \quad \mathrm{Im}\{z\}\frac{z - z^*}{2i}.$$

Por otra parte, y aunque este es un resultado que contextualizaremos mejor más adelante en este texto, es posible calcular el módulo de un número complejo z valiéndose de la conjugación:

$$|z| = \sqrt{z \cdot z^*} = r = \sqrt{a^2 + b^2}.$$

Apéndice D

Manipulación de matrices

Especialmente a partir del Capítulo 3, emplearemos en esta obra matrices de manera bastante intensiva, como elemento clave en la llamada *representación matricial* de aplicaciones lineales y en las *matrices de cambio de base*. Después, en los capítulos 4 y 5, también necesitaremos usar matrices junto con algunos resultados elementales de análisis matricial. Nuestro objetivo en este apéndice es reunir de manera compacta todas estas ideas fundamentales en la manipulación de matrices.

D.1. Ideas básicas y nomenclatura

Una matriz de orden $m \times n$ es una disposición bidimensional de elementos de un cuerpo $\mathbb{F}$. Entenderemos que esta disposición se organiza en m filas y n columnas. Cada uno de los $m \cdot n$ elementos se denotará mediante a_{ij}, en donde i $(i = 1, \ldots, m)$ designa a la fila a la que pertenece el elemento, y j $(j = 1, \ldots, n)$ designa a la columna. A continuación mostramos, como ejemplo, una matriz A de orden 3×4:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \end{pmatrix}.$$

Una matriz se dice *cuadrada* cuando $m = n$. En una matriz cuadrada, llamamos *diagonal principal* a los elementos $a_{ii}, \forall i = 1, \ldots, n$. A la matriz cuadrada caracterizada por tener su diagonal principal formada por 1 y el resto de sus elementos por 0 se le denomina *matriz identidad*, y se suele representar mediante I. Cuando una matriz cuadrada es diagonal, en el sentido que todos sus elementos son nulos excepto algunos de la diagonal, se suele expresar como $\mathrm{diag}(a_1, \ldots, a_n)$, donde los a_i son precisamente los elementos de la diagonal.

Una matriz cuadrada se dice *triangular superior/inferior* si todos los elementos por debajo/encima de su diagonal principal son nulos.

Una matriz cuadrada se dice *tridiagonal* si todos sus elementos por debajo y por encima de las diagonales adyacentes a la diagonal principal son nulos.

Cualquier matriz puede ser descrita por *bloques*. Así, podemos hablar de *matrices columna* A, formadas por submatrices columna, y *matrices fila* B, formadas por submatrices fila:

$$A = \begin{pmatrix} A_1 & A_2 & A_3 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} B_1 \\ B_2 \\ B_3 \end{pmatrix}.$$

D.2. Operaciones con matrices

D.2.1. Suma de matrices

Dadas dos matrices, A y B, de orden $m \times n$, se define C, matriz suma de A y B, como aquella matriz del mismo orden tal que sus elementos se obtienen como $c_{ij} = a_{ij} + b_{ij}, \forall i, j$. Obsérvese que sólo está bien definida la suma para matrices del mismo orden, y que la suma de matrices es conmutativa.

D.2.2. Producto de una matriz por un escalar

Sea A una matriz de orden $m \times n$, y sea un escalar $\alpha \in \mathbb{F}$. Se define la matriz B, resultado del producto αA, como aquella matriz, también de orden $m \times n$, formada por los elementos $b_{ij} = \alpha a_{ij}, \forall i, j$.

D.2.3. Producto de matrices

Sea A una matriz de orden $m \times n$, y B una matriz de orden $n \times p$. La matriz C, de orden $m \times p$, resultado del producto de A y B, $C = AB$, está dada por los $c_{ij} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik} b_{kj}$. Obsérvese lo siguiente:

- Este producto sólo está bien definido si el número de columnas de la primera matriz (A) coincide con el número de filas de la segunda (B).
- El producto de matrices *no* es, en general, conmutativo. Si, para dos matrices concretas, X, Y, se tiene que $XY = YX$, se dice entonces que X e Y conmutan.
- El producto de tres matrices, si es posible, es asociativo.
- El producto de matrices, si es posible, es distributivo con respecto a la suma de matrices.
- Dada la matriz A cuadrada, se tiene que $AI = IA$.

D.3. Resultados básicos de análisis matricial

El Análisis Matricial es una disciplina, dentro del Análisis, con entidad propia. Es inútil resumir aquí el Análisis Matricial[1]. Nuestro objetivo es extractar los resultados fundamentales que emplearemos en esta obra.

[1] Al lector interesado se le remite a la monumental obra de Horn y Johnson: R.A. Horn y C.R. Johnson: *Matrix Analysis*, segunda edición, Cambridge University Press, 2013.

- Matriz **inversa**: Sea A una matriz cuadrada. Si existe una matriz B tal que $AB = BA = I$, dicha matriz B se denomina la *inversa* de A, y suele denotarse como $B = A^{-1}$. A entonces se dice *invertible* o *no singular*. Si una matriz tiene inversa, ésta es única.

- Matriz **traspuesta**: Dada una matriz A de orden $m \times n$, se llama matriz *traspuesta* de A (A^t) a la matriz B de orden $n \times m$ cuyos elementos verifican $b_{ij} = a_{ji}$. La operación de trasposición posee algunas propiedades interesantes:

  - $(A^t)^t = A$.
  - $(A + B)^t = A^t + B^t$.
  - $(\alpha A)^t = \alpha A^t$.
  - $(BA)^t = A^t B^t$.
  - Si A es cuadrada e invertible, A^t es invertible y $(A^t)^{-1} = (A^{-1})^t$.
  - Si $A = A^t$, se dice que A es *simétrica*.

- Matriz **adjunta**: Si los elementos de A pueden ser complejos, se llama matriz *adjunta* de A a la matriz A^*. Los elementos de esta matriz se obtienen conjugando y trasponiendo los de A. Si una matriz es tal que $A = A^*$ se dice que es *hermítica*.

- Matriz **normal**: Una matriz A se dice *normal* si conmuta con su adjunta: $AA^* = A^*A$. Observe que todas las matrices hermíticas son normales.

- Matriz **unitaria**: Una matriz A se dice *unitaria* si $AA^* = A^*A = I$. Observe que todas las matrices unitarias son normales.

- Matriz **ortogonal**: Una matriz A se dice *ortogonal* si $AA^t = A^tA = I$.

- **Traza** de una matriz: Se llama *traza* de una matriz cuadrada A a la suma de los elementos de su diagonal principal: $\mathrm{tr}(A) = \sum_{i=1}^n a_{ii}$. Esta operación posee algunas propiedades interesantes:

  - $\mathrm{tr}(A + B) = \mathrm{tr}(A) + \mathrm{tr}(B)$.
  - $\mathrm{tr}(\alpha A) = \alpha \mathrm{tr}(A)$.
  - $\mathrm{tr}(A^t) = \mathrm{tr}(A)$.
  - $\mathrm{tr}(AB) = \mathrm{tr}(BA) \neq \mathrm{tr}(A)\mathrm{tr}(B)$. Esta propiedad se suele denominar de la *ciclicidad* de la traza, y quizás sea más evidente con tres matrices: $\mathrm{tr}(ABC) = \mathrm{tr}(CAB) = \mathrm{tr}(BCA)$.
  - Si $\mathrm{Sp}(A) = \{\lambda_1, \ldots, \lambda_n\}$, entonces $\mathrm{tr}(A) = \sum_{i=1}^n \lambda_i$.